

Resuelve

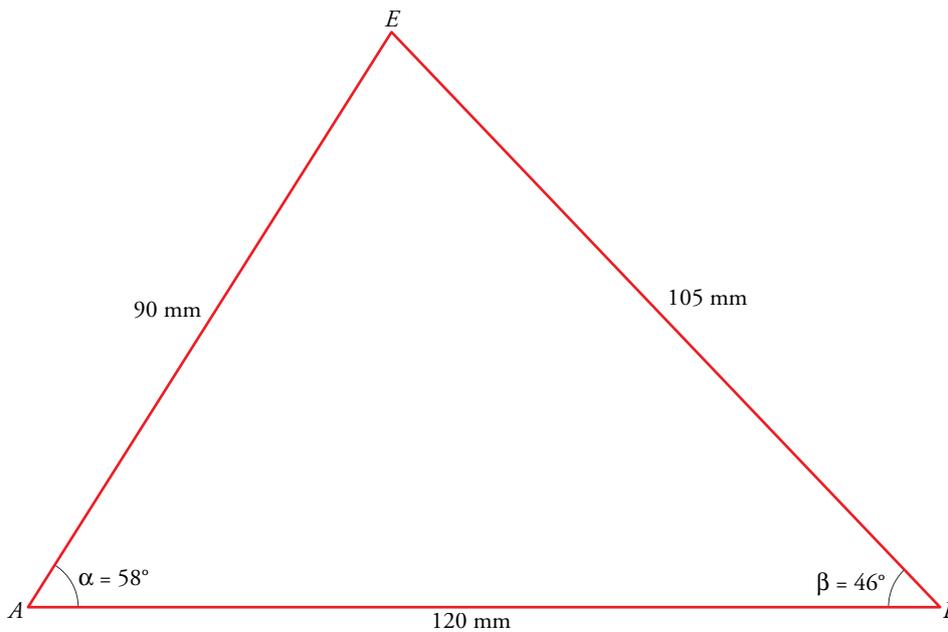
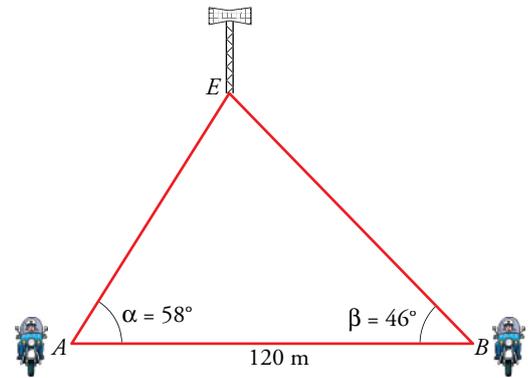
Página 105

Localización de una emisora clandestina

Vamos a aplicar la técnica de la triangulación para resolver el siguiente problema:

Una emisora de radio clandestina E se sintoniza desde dos controles policiales, A y B . En cada uno de ellos se detecta la dirección en la que se encuentra, no la distancia. Por tanto, se conocen los ángulos $\alpha = 58^\circ$ y $\beta = 46^\circ$, así como la distancia $AB = 120$ m. Para localizar sobre el terreno la emisora E hay que calcular la distancia \overline{AE} o la distancia \overline{BE} .

Resuelve el problema planteado realizando un dibujo en tu cuaderno a escala 1:1 000 (1 m = 1 mm). Sobre el papel, mide los lados AE y BE e interpreta el resultado en la realidad.



La emisora se encuentra a 90 m del control A y a 105 m del control B .

1 Razones trigonométricas de un ángulo agudo (0° a 90°)

Página 106

Hazlo tú. Sabiendo que $\operatorname{sen} \beta = 0,39$ calcula $\operatorname{cos} \beta$ y $\operatorname{tg} \beta$.

$$\operatorname{cos} \beta = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \beta} = \sqrt{1 - (0,39)^2} = 0,92$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \beta} = \frac{0,39}{0,92} = 0,42$$

Hazlo tú. Conociendo $\operatorname{tg} \beta = 1,28$ calcula $\operatorname{sen} \beta$ y $\operatorname{cos} \beta$.

$$s = \operatorname{sen} \beta; \quad c = \operatorname{cos} \beta$$

$$\begin{cases} s^2 + c^2 = 1 \rightarrow (1,28c)^2 + c^2 = 1 \rightarrow 2,6384c^2 = 1 \rightarrow c = 0,62 \\ \frac{s}{c} = 1,28 \rightarrow s = 1,28c \end{cases}$$

$$\operatorname{cos} \beta = 0,62$$

$$\operatorname{sen} \beta = 1,28 \cdot 0,62 = 0,79$$

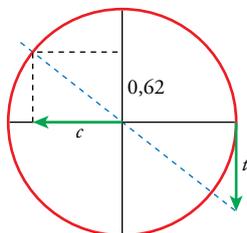
2 Razones trigonométricas de ángulos cualesquiera (0° a 360°)

Página 107

- 1 Sabiendo que el ángulo α está en el segundo cuadrante ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$) y $\text{sen } \alpha = 0,62$, calcula $\text{cos } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$.

$$\text{cos } \alpha = -\sqrt{1 - 0,62^2} = -0,78$$

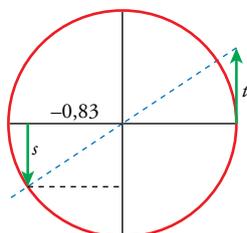
$$\text{tg } \alpha = \frac{0,62}{-0,78} = -0,79$$



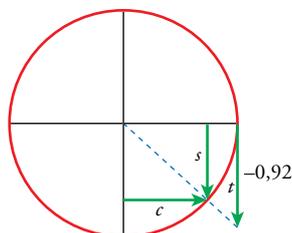
- 2 Sabiendo que el ángulo α está en el tercer cuadrante ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$) y $\text{cos } \alpha = -0,83$, calcula $\text{sen } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$.

$$\text{sen } \alpha = -\sqrt{1 - (0,83)^2} = -0,56$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{-0,56}{-0,83} = 0,67$$



- 3 Sabiendo que el ángulo α está en el cuarto cuadrante ($270^\circ < \alpha < 360^\circ$) y $\text{tg } \alpha = -0,92$, calcula $\text{sen } \alpha$ y $\text{cos } \alpha$.



$$\left. \begin{array}{l} \frac{s}{c} = -0,92 \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\} \text{El sistema tiene dos soluciones: } \begin{cases} s = -0,68; c = 0,74 \\ s = 0,68; c = -0,74 \end{cases}$$

- 4 Completa en tu cuaderno la siguiente tabla y amplíala para los ángulos 210° , 225° , 240° , 270° , 300° , 315° , 330° y 360° .

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1				
cos	1	$\sqrt{3}/2$			0				
tg	0	$\sqrt{3}/3$			-				

	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
tg	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
sen	-1/2	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1/2	0
cos	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1/2	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
tg	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

3 Ángulos fuera del intervalo 0° a 360°

Página 108

1 Pasa cada uno de los siguientes ángulos al intervalo $[0^\circ, 360^\circ)$ y al intervalo $(-180^\circ, 180^\circ]$:

- a) 396° b) 492° c) 645°
d) 3895° e) 7612° f) 1980°

Se trata de expresar el ángulo de la siguiente forma:

$$k \text{ o } -k, \text{ donde } k \leq 180^\circ$$

- a) $396^\circ = 396^\circ - 360^\circ = 36^\circ$
b) $492^\circ = 492^\circ - 360^\circ = 132^\circ$
c) $645^\circ = 645^\circ - 360^\circ = 285^\circ = 285^\circ - 360^\circ = -75^\circ$
d) $3895^\circ = 3895^\circ - 10 \cdot 360^\circ = 295^\circ = 295^\circ - 360^\circ = -65^\circ$
e) $7612^\circ = 7612^\circ - 21 \cdot 360^\circ = 52^\circ$
f) $1980^\circ = 1980^\circ - 5 \cdot 360^\circ = 180^\circ$

Cuando hacemos, por ejemplo, $7612^\circ = 7612^\circ - 21 \cdot 360^\circ$, ¿por qué tomamos 21? Porque, previamente, hemos realizado la división $7612 \div 360 = 21.144\dots$. Es el cociente entero.

2 Determina el valor de estas razones trigonométricas:

- a) 13290° b) (-1680°) c) 3825° d) 4995°
e) (-1710°) f) 3630° g) (-36000°) h) (-330°)

a) $13290^\circ = 360^\circ \cdot 36 + 330^\circ$

$$\operatorname{sen} 13290^\circ = \operatorname{sen} 330^\circ = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

b) $-1680^\circ = -360^\circ \cdot 4 - 240^\circ$

$$\operatorname{cos} (-1680^\circ) = \operatorname{cos} (-240^\circ) = \operatorname{cos} 120^\circ = -\operatorname{cos} 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

c) $3825^\circ = 360^\circ \cdot 10 + 225^\circ$

$$\operatorname{tg} 3825^\circ = \operatorname{tg} 225^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

d) $4995^\circ = 360^\circ \cdot 13 + 315^\circ$

$$\operatorname{cos} 4995^\circ = \operatorname{cos} 315^\circ = \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

e) $-1710^\circ = -360^\circ \cdot 4 - 270^\circ$

$$\operatorname{sen} (-1710^\circ) = \operatorname{sen} (-270^\circ) = \operatorname{sen} (90^\circ) = 1$$

f) $3630^\circ = 360^\circ \cdot 10 + 30^\circ$

$$\operatorname{tg} 3630^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

g) $-36000^\circ = -360^\circ \cdot 100$

$$\operatorname{cos} (-36000^\circ) = \operatorname{cos} 0^\circ = 1$$

h) $\operatorname{sen} (-330^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$

4 Trigonometría con calculadora

Página 109

Hazlo tú. Sabiendo que $\operatorname{sen} \beta = 0,87$ y $90^\circ < \beta < 180^\circ$, calcula $\operatorname{cos} \beta$ y $\operatorname{tg} \beta$.

$$\operatorname{cos} \beta = -0,493$$

$$\operatorname{tg} \beta = -1,765$$

1 A partir de los datos que se ofrecen en cada apartado relativos al ángulo α , halla, con ayuda de la calculadora, las razones trigonométricas de α .

a) $\operatorname{sen} \alpha = 0,573$; $\alpha > 90^\circ$

b) $\operatorname{cos} \alpha = 0,309$; $\operatorname{sen} \alpha < 0$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,327$; $180^\circ < \alpha < 270^\circ$

d) $\operatorname{cos} \alpha = -0,819$; $\operatorname{tg} \alpha < 0$

a) $\operatorname{cos} \alpha = -0,82$

$$\operatorname{tg} \alpha = -0,699$$

b) $\operatorname{sen} \alpha = -0,951$

$$\operatorname{tg} \alpha = -3,078$$

c) $\operatorname{sen} \alpha = -0,799$

$$\operatorname{cos} \alpha = -0,602$$

d) $\operatorname{sen} \alpha = 0,574$

$$\operatorname{tg} \alpha = -0,7$$

5 Relaciones entre las razones trigonométricas de algunos ángulos

Página 111

1 Calcula las razones trigonométricas de 55° , 125° , 145° , 215° , 235° , 305° y 325° a partir de las razones trigonométricas de 35° :

$$\text{sen } 35^\circ = 0,57; \text{ cos } 35^\circ = 0,82; \text{ tg } 35^\circ = 0,70$$

- $55^\circ = 90^\circ - 35^\circ \rightarrow 55^\circ$ y 35° son complementarios.

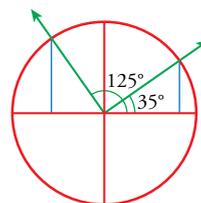
$$\left. \begin{array}{l} \text{sen } 55^\circ = \text{cos } 35^\circ = 0,82 \\ \text{cos } 55^\circ = \text{sen } 35^\circ = 0,57 \end{array} \right\} \text{tg } 55^\circ = \frac{\text{sen } 55^\circ}{\text{cos } 55^\circ} = \frac{0,82}{0,57} = 1,43 \quad \left(\text{También } \text{tg } 55^\circ = \frac{1}{\text{tg } 35^\circ} = \frac{1}{0,70} \approx 1,43 \right)$$

- $125^\circ = 90^\circ + 35^\circ$

$$\text{sen } 125^\circ = \text{cos } 35^\circ = 0,82$$

$$\text{cos } 125^\circ = -\text{sen } 35^\circ = -0,57$$

$$\text{tg } 125^\circ = \frac{-1}{\text{tg } 35^\circ} = \frac{-1}{0,70} = -1,43$$

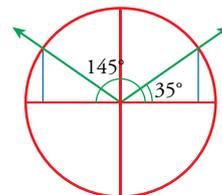


- $145^\circ = 180^\circ - 35^\circ \rightarrow 145^\circ$ y 35° son suplementarios.

$$\text{sen } 145^\circ = \text{sen } 35^\circ = 0,57$$

$$\text{cos } 145^\circ = -\text{cos } 35^\circ = -0,82$$

$$\text{tg } 145^\circ = -\text{tg } 35^\circ = -0,70$$

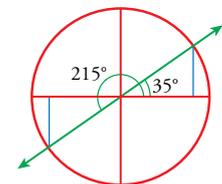


- $215^\circ = 180^\circ + 35^\circ$

$$\text{sen } 215^\circ = -\text{sen } 35^\circ = -0,57$$

$$\text{cos } 215^\circ = -\text{cos } 35^\circ = -0,82$$

$$\text{tg } 215^\circ = \text{tg } 35^\circ = 0,70$$

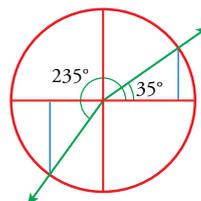


- $235^\circ = 270^\circ - 35^\circ$

$$\text{sen } 235^\circ = -\text{cos } 35^\circ = -0,82$$

$$\text{cos } 235^\circ = -\text{sen } 35^\circ = -0,57$$

$$\text{tg } 235^\circ = \frac{\text{sen } 235^\circ}{\text{cos } 235^\circ} = \frac{-\text{cos } 35^\circ}{-\text{sen } 35^\circ} = \frac{1}{\text{tg } 35^\circ} = \frac{1}{0,70} = 1,43$$

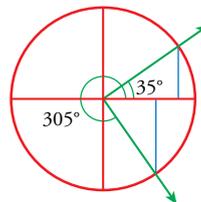


- $305^\circ = 270^\circ + 35^\circ$

$$\text{sen } 305^\circ = -\text{cos } 35^\circ = -0,82$$

$$\text{cos } 305^\circ = \text{sen } 35^\circ = 0,57$$

$$\text{tg } 305^\circ = \frac{\text{sen } 305^\circ}{\text{cos } 305^\circ} = \frac{-\text{cos } 35^\circ}{\text{sen } 35^\circ} = -\frac{1}{\text{tg } 35^\circ} = -1,43$$

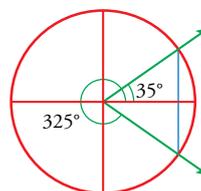


- $325^\circ = 360^\circ - 35^\circ (= -35^\circ)$

$$\text{sen } 325^\circ = -\text{sen } 35^\circ = -0,57$$

$$\text{cos } 325^\circ = \text{cos } 35^\circ = 0,82$$

$$\text{tg } 325^\circ = \frac{\text{sen } 325^\circ}{\text{cos } 325^\circ} = \frac{-\text{sen } 35^\circ}{\text{cos } 35^\circ} = -\text{tg } 35^\circ = -0,70$$



2 Averigua las razones trigonométricas de 358° , 156° y 342° , utilizando la calculadora solo para hallar razones trigonométricas de ángulos comprendidos entre 0° y 90° .

• $358^\circ = 360^\circ - 2^\circ$

$sen\ 358^\circ = -sen\ 2^\circ = -0,0349$

$cos\ 358^\circ = cos\ 2^\circ = 0,9994$

$tg\ 358^\circ \stackrel{(*)}{=} -tg\ 2^\circ = -0,03492$

$(*)\ tg\ 358^\circ = \frac{sen\ 358^\circ}{cos\ 358^\circ} = \frac{-sen\ 2^\circ}{cos\ 2^\circ} = -tg\ 2^\circ$

• $156^\circ = 180^\circ - 24^\circ$

$sen\ 156^\circ = sen\ 24^\circ = 0,4067$

$cos\ 156^\circ = -cos\ 24^\circ = -0,9135$

$-tg\ 24^\circ = -0,4452$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

$156^\circ = 90^\circ + 66^\circ$

$sen\ 156^\circ = cos\ 66^\circ = 0,4067$

$cos\ 156^\circ = -sen\ 66^\circ = -0,9135$

$tg\ 156^\circ = \frac{-1}{tg\ 66^\circ} = \frac{-1}{2,2460} = -0,4452$

• $342^\circ = 360^\circ - 18^\circ$

$sen\ 342^\circ = -sen\ 18^\circ = -0,3090$

$cos\ 342^\circ = cos\ 18^\circ = 0,9511$

$tg\ 342^\circ = -tg\ 18^\circ = -0,3249$

3 Dibuja, sobre la circunferencia goniométrica, ángulos que cumplan las siguientes condiciones y estima, en cada caso, el valor de las restantes razones trigonométricas:

a) $sen\ \alpha = -\frac{1}{2}$, $tg\ \alpha > 0$

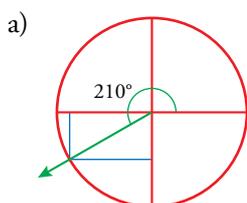
b) $cos\ \alpha = \frac{3}{4}$, $\alpha > 90^\circ$

c) $tg\ \alpha = -1$, $cos\ \alpha < 0$

d) $tg\ \alpha = 2$, $cos\ \alpha < 0$

e) $sen\ \alpha = -1$

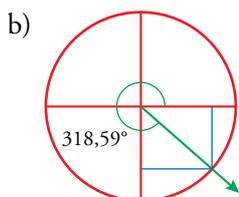
f) $cos\ \alpha = 0$, $sen\ \alpha > 0$



$sen\ \alpha = -1/2 < 0$
 $tg\ \alpha > 0$ } $\rightarrow cos\ \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{er}$ cuadrante

$cos\ 210^\circ \approx -0,86$

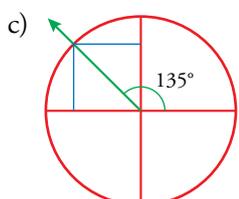
$tg\ 210^\circ \approx 0,58$



$cos\ \alpha = 3/4$
 $\alpha > 90^\circ$ } $\rightarrow \alpha \in 4.^o$ cuadrante

$sen\ 318,59^\circ \approx -0,66$

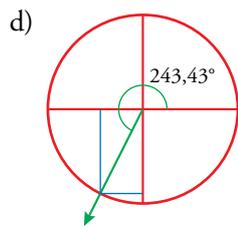
$tg\ 318,59^\circ \approx -0,88$



$tg\ \beta = -1 < 0$
 $cos\ \beta < 0$ } $\rightarrow sen\ \beta > 0 \rightarrow \beta \in 2.^o$ cuadrante

$sen\ 135^\circ \approx 0,7$

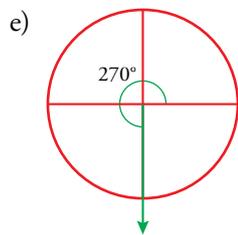
$cos\ 135^\circ \approx -0,7$



$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = 2 > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{\text{er}} \text{ cuadrante}$$

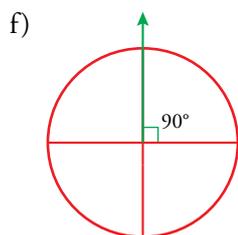
$$\operatorname{sen} 243,43^\circ \approx -0,9$$

$$\cos 243,43^\circ \approx -0,45$$



$$\cos 270^\circ = \cos 90^\circ = 0$$

$$\operatorname{tg} 270^\circ \text{ no existe}$$



$$\operatorname{sen} 90^\circ = 1$$

$$\operatorname{tg} 90^\circ \text{ no existe}$$

6 Resolución de triángulos rectángulos

Página 112

Hazlo tú. Los catetos de un triángulo rectángulo son $a = 47$ cm y $b = 62$ cm. Halla la hipotenusa y los ángulos.

Por el teorema de Pitágoras, $c = \sqrt{47^2 + 62^2} = 77,8$ cm

$$\tan \hat{A} = \frac{a}{b} = \frac{47}{62} \rightarrow \hat{A} = 37^\circ 9' 52''$$

$$\hat{B} = 90^\circ - \hat{A} = 90^\circ - 37^\circ 14' 5'' = 52^\circ 50' 8''$$

Hazlo tú. En un triángulo rectángulo conocemos $\hat{B} = 62^\circ$ y $b = 152$ m. Halla los demás elementos.

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow c = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{152}{\operatorname{sen} 62^\circ} = 172,15 \text{ cm}$$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{b}{a} \rightarrow a = \frac{b}{\operatorname{tg} \hat{B}} = \frac{152}{\operatorname{tg} 62^\circ} = 80,82 \text{ cm}$$

$$\hat{A} = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$$

Hazlo tú. Conocemos la hipotenusa, $c = 72$ m, y el ángulo $\hat{A} = 23^\circ$ de un triángulo rectángulo. Calcula b .

$$\cos \hat{A} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \cdot \cos \hat{A} = 72 \cdot \cos 23^\circ = 66,28 \text{ cm}$$

Página 113

1 Las siguientes propuestas están referidas a triángulos rectángulos que, en todos los casos, se designan por ABC , siendo C el ángulo recto.

a) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57^\circ$. Calcula a .

b) Datos: $c = 32$ cm, $\hat{B} = 57^\circ$. Calcula b .

c) Datos: $a = 250$ m, $b = 308$ m. Calcula c y \hat{A} .

d) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32^\circ$. Calcula b .

e) Datos: $a = 35$ cm, $\hat{A} = 32^\circ$. Calcula c .

$$a) \cos \hat{B} = \frac{a}{c} \rightarrow a = c \cos \hat{B} = 17,43 \text{ cm}$$

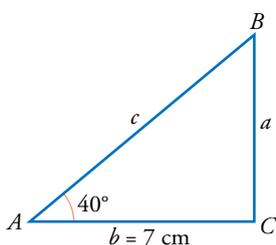
$$b) \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{b}{c} \rightarrow b = c \operatorname{sen} \hat{B} = 26,84 \text{ cm}$$

$$c) c = \sqrt{a^2 + b^2} = 396,69 \text{ m}; \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} = 0,81 \rightarrow \hat{A} = 39^\circ 3' 57''$$

$$d) \operatorname{tg} \hat{A} = \frac{a}{b} \rightarrow b = \frac{a}{\operatorname{tg} \hat{A}} = 56,01 \text{ cm}$$

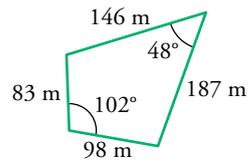
$$e) \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{a}{c} \rightarrow c = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = 66,05 \text{ cm}$$

2 Para determinar la altura de un poste nos hemos alejado 7 m de su base y hemos medido el ángulo que forma la visual al punto más alto con la horizontal, obteniendo un valor de 40° . ¿Cuánto mide el poste?



$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{a}{7} \rightarrow a = 7 \operatorname{tg} 40^\circ = 5,87 \text{ m}$$

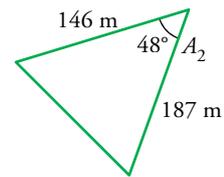
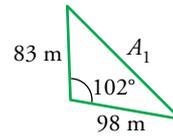
3 Halla el área del siguiente cuadrilátero. Sugerencia: pártelo en dos triángulos.



$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 98 \cdot 83 \cdot \text{sen } 102^\circ = 3978,13 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 187 \cdot 146 \cdot \text{sen } 48^\circ = 10144,67 \text{ m}^2$$

El área es la suma de A_1 y A_2 : $14122,80 \text{ m}^2$



7 Estrategia de la altura para resolver triángulos oblicuángulos

Página 115

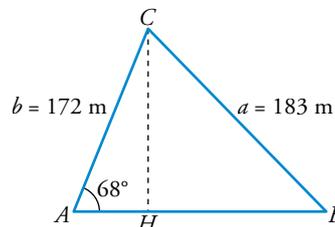
1 En un triángulo ABC conocemos $\hat{A} = 68^\circ$, $b = 172$ m y $a = 183$ m. Calcula la longitud del lado c .

$$\overline{AH} = 172 \cos 68^\circ = 64,43 \text{ m}$$

$$\overline{CH} = 172 \operatorname{sen} 68^\circ = 159,48 \text{ m}$$

$$\overline{HB} = \sqrt{a^2 - \overline{CH}^2} = 89,75 \text{ m}$$

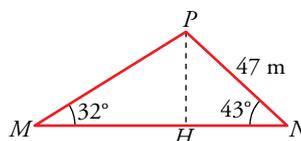
$$c = \overline{AH} + \overline{HB} = 64,43 \text{ m} + 89,75 \text{ m} = 154,18 \text{ m}$$



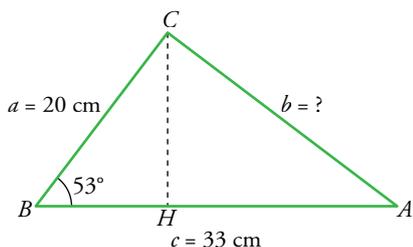
2 En un triángulo MNP conocemos $\hat{M} = 32^\circ$, $\hat{N} = 43^\circ$ y $\overline{NP} = 47$ m. Calcula \overline{MP} .

$$\operatorname{sen} 43^\circ = \frac{\overline{PH}}{47} \rightarrow \overline{PH} = 47 \operatorname{sen} 43^\circ = 32,05 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen} 32^\circ = \frac{\overline{PH}}{\overline{MP}} \rightarrow \overline{MP} = \frac{\overline{PH}}{\operatorname{sen} 32^\circ} = \frac{32,05}{\operatorname{sen} 32^\circ} = 60,49 \text{ m}$$



3 En un triángulo ABC conocemos $a = 20$ cm, $c = 33$ cm y $\hat{B} = 53^\circ$. Calcula la longitud del lado b .



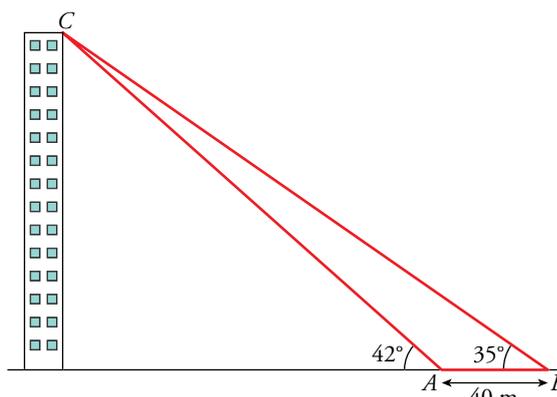
$$\overline{BH} = a \cos 53^\circ = 12,04 \text{ cm}$$

$$\overline{CH} = a \operatorname{sen} 53^\circ = 15,97 \text{ cm}$$

$$\overline{HA} = c - \overline{BH} = 20,96 \text{ cm}$$

$$b = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HA}^2} = 26,35 \text{ cm}$$

4 Observa el gráfico de la derecha. Estamos en A , medimos el ángulo bajo el que se ve el edificio (42°), nos alejamos 40 m y volvemos a medir el ángulo (35°). ¿Cuál es la altura del edificio y a qué distancia nos encontramos de él?



$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 42^\circ &= \frac{h}{d} \rightarrow h = d \operatorname{tg} 42^\circ \\ \operatorname{tg} 35^\circ &= \frac{h}{d + 40} \rightarrow h = (d + 40) \operatorname{tg} 35^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow d \operatorname{tg} 42^\circ = (d + 40) \operatorname{tg} 35^\circ \rightarrow d = \frac{40 \operatorname{tg} 35^\circ}{\operatorname{tg} 42^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ} = 139,90 \text{ m}$$

$$h = d \operatorname{tg} 42^\circ = 125,97 \text{ m}$$

La altura es $125,97$ m. La primera distancia es $139,90$ m, y ahora, después de alejarnos 40 m, estamos a $179,90$ m.

8 Dos importantes teoremas para resolver triángulos cualesquiera

Página 116

1 ¿Verdadero o falso?

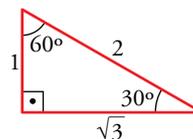
- a) El teorema de los senos confirma que en un triángulo, “a mayor lado se opone mayor ángulo”.
 b) Este triángulo rectángulo es la mitad de un triángulo equilátero.

Dividimos el seno de cada ángulo entre el lado opuesto:

$$\bullet \frac{\text{sen } 60^\circ}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{\text{sen } 90^\circ}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \frac{\text{sen } 30^\circ}{1} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$



Con estas igualdades se comprueba que se cumple el teorema de los senos.

- a) Verdadero.

Como la razón entre el lado y el seno del ángulo opuesto es constante, cuanto mayor es el lado, mayor es el seno del ángulo opuesto y, por tanto, mayor es el ángulo opuesto (al tratarse de ángulos de un triángulo).

- b) Verdadero.

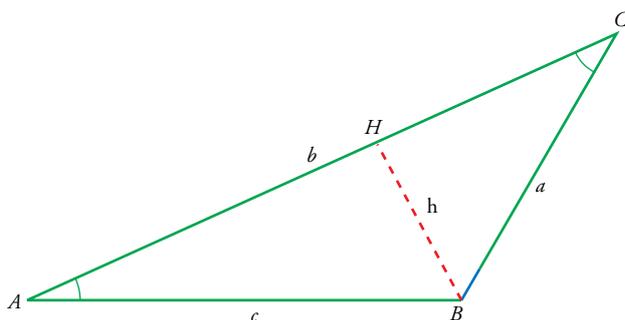
Con estas igualdades se comprueba el teorema de los senos en el caso particular de un triángulo equilátero. Sin embargo, el teorema es mucho más general porque se pueda aplicar a triángulos cualesquiera.

2 Demuestra detalladamente, basándote en la demostración del teorema de los senos, la siguiente relación:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

Lo demostramos para \hat{C} ángulo agudo. (Si fuese un ángulo obtuso razonaríamos como en el ejercicio anterior).

Trazamos la altura h desde el vértice B . Así, los triángulos obtenidos AHB y CHB son rectángulos.



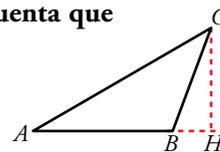
Por tanto, tenemos $\text{sen } \hat{A} = \frac{h}{c} \rightarrow h = c \text{sen } \hat{A}$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \text{sen } \hat{C}$$

$$c \text{sen } \hat{A} = a \text{sen } \hat{C}$$

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}}$$

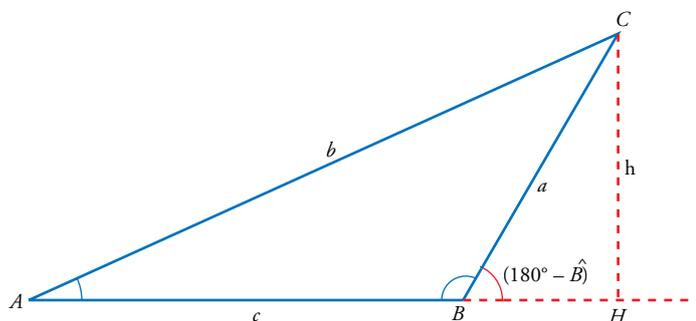
3 Repite la demostración anterior en el caso de que \widehat{B} sea obtuso. Ten en cuenta que $\text{sen}(180^\circ - \widehat{B}) = \text{sen } \widehat{B}$.



$$\text{sen } \widehat{A} = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \text{ sen } \widehat{A}$$

$$\text{sen } \widehat{B} = \text{sen}(180 - \widehat{B}) = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \text{ sen } \widehat{B}$$

$$b \text{ sen } \widehat{A} = a \text{ sen } \widehat{B} \rightarrow \frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}}$$



Página 117

Hazlo tú. Halla b y c conociendo $a = 56$ m, $\widehat{B} = 52^\circ$ y $\widehat{C} = 112^\circ$.

$$\widehat{A} = 180^\circ - 52^\circ - 112^\circ = 26^\circ$$

Ahora usamos el teorema de los senos.

$$\frac{56}{\text{sen } 26^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 52^\circ} \rightarrow b = \frac{56 \cdot \text{sen } 52^\circ}{\text{sen } 26^\circ} = 100,66 \text{ m}$$

$$\frac{56}{\text{sen } 26^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 112^\circ} \rightarrow c = \frac{56 \cdot \text{sen } 112^\circ}{\text{sen } 26^\circ} = 118,44 \text{ m}$$

Hazlo tú. Calcula \widehat{A} conociendo $a = 6$ cm, $b = 4$ cm y $\widehat{B} = 30^\circ$.

Por el teorema de los senos:

$$\frac{6}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{4}{\text{sen } 30^\circ} \rightarrow \text{sen } \widehat{A} = \frac{6 \cdot \text{sen } 30^\circ}{4} = 0,75 \rightarrow \widehat{A}_1 = 48^\circ 35' 25'' \quad \widehat{A}_2 = 131^\circ 24' 35''$$

En este caso ambas soluciones son posibles porque $\widehat{A} + \widehat{B} < 180^\circ$.

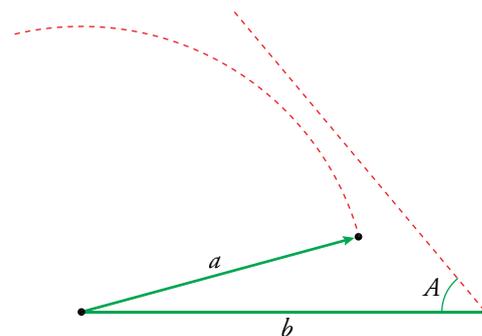
Por tanto, tenemos dos posibles triángulos, uno acutángulo y otro obtusángulo.

4 ¿Verdadero o falso?

- a) Si nos dan dos lados de un triángulo, a y b , y el ángulo opuesto a uno de ellos, \widehat{A} , y deseamos hallar el ángulo \widehat{B} , con el teorema de los senos seguro que llegaremos a una solución.
- b) Si nos dan dos lados y un ángulo de un triángulo y deseamos hallar otro lado, el teorema de los senos seguro que nos permite llegar a una solución.

a) Falso.

Si el lado a no es suficientemente grande, el problema no tendrá solución como muestra el siguiente dibujo:



b) Falso.

Si nos dan el ángulo comprendido entre los dos lados, no podemos plantear el problema usando el teorema de los senos.

5 En un triángulo ABC , conocemos $a = 4$ cm y $\widehat{B} = 30^\circ$. Halla \widehat{A} en los siguientes casos:

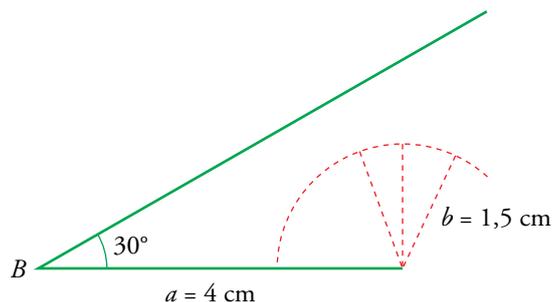
- a) $b = 1,5$ cm b) $b = 2$ cm c) $b = 3$ cm d) $b = 4$ cm

a) $b = 1,5$ cm

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} \rightarrow \frac{4}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{1,5}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} \rightarrow \widehat{\text{sen } A} = \frac{4 \cdot 0,5}{1,5} = 1,3$$

¡Imposible, pues $\widehat{\text{sen } A} \in [-1, 1]$ siempre!

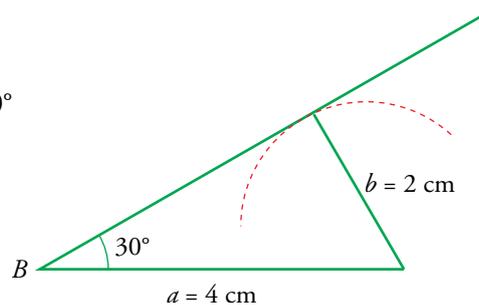
No tiene solución. Con esta medida, $b = 1,5$ cm, el lado b nunca podría tocar al lado c .



b) $b = 2$ cm

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} \rightarrow \frac{4}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{2}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} \rightarrow \widehat{\text{sen } A} = \frac{4 \cdot 0,5}{2} = 1 \rightarrow A = 90^\circ$$

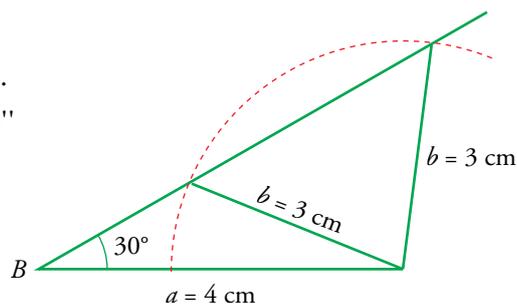
Se obtiene una única solución.



c) $b = 3$ cm

$$\frac{4}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{3}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} \rightarrow \widehat{\text{sen } A} = \frac{4 \cdot 0,5}{3} = 0,6 \rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_1 = 41^\circ 48' 37,1'' \\ \widehat{A}_2 = 138^\circ 11' 22,9'' \end{cases}$$

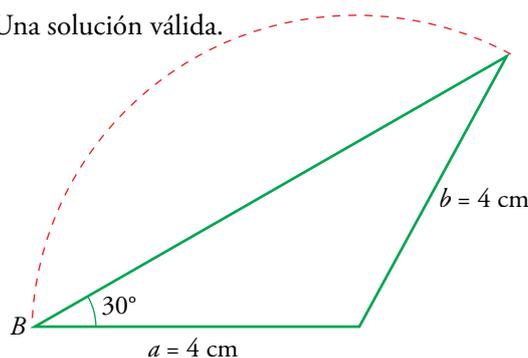
Las dos soluciones son válidas, pues en ningún caso ocurre que $\widehat{A} + \widehat{B} > 180^\circ$.



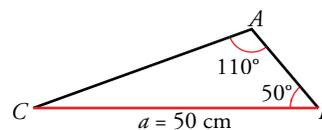
d) $b = 4$ cm

$$\frac{4}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{4}{\widehat{\text{sen } 30^\circ}} \rightarrow \widehat{\text{sen } A} = \frac{4 \cdot 0,5}{4} = 0,5 \rightarrow \begin{cases} \widehat{A}_1 = 30^\circ \\ \widehat{A}_2 = 150^\circ \end{cases} \rightarrow \text{Una solución válida.}$$

La solución $\widehat{A}_2 = 150^\circ$ no es válida, pues, en tal caso, sería $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$. ¡Imposible!



6 Calcula los lados b y c del triángulo de la derecha.



Hallamos el ángulo $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - 160^\circ = 20^\circ$

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{50}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } 50^\circ}} \rightarrow b = \frac{50 \cdot \widehat{\text{sen } 50^\circ}}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = 40,76 \text{ cm}$$

$$\frac{50}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } 20^\circ}} \rightarrow c = \frac{50 \cdot \widehat{\text{sen } 20^\circ}}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = 18,2 \text{ cm}$$

Página 118

7 ¿Verdadero o falso?

a) Si de un triángulo conocemos dos lados y el ángulo que forman, el teorema del coseno nos permite obtener el otro lado.

b) Si aplicamos el teorema del coseno a la hipotenusa de un triángulo rectángulo, entonces obtenemos el teorema de Pitágoras.

a) Verdadero. Esta es la situación en la que se usa el teorema del coseno para calcular el tercer lado de un triángulo.

b) Verdadero. El ángulo opuesto a la hipotenusa es el ángulo recto y, por tanto, su coseno vale cero.

Si a es la hipotenusa, el ángulo opuesto es $\hat{A} = 90^\circ$ y se obtiene el teorema de Pitágoras a partir del teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ \rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

Página 119

Hazlo tú. Calcula c conociendo $a = 7$ m, $b = 22$ m y $\hat{C} = 40^\circ$.

Por el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \rightarrow c = \sqrt{7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cdot \cos 40^\circ} = 17,24 \text{ m}$$

8 Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 12$ cm; $b = 16$ cm; $c = 10$ cm

b) $b = 22$ cm; $a = 7$ cm; $\hat{C} = 40^\circ$

c) $b = 4$ cm; $c = 3$ cm; $\hat{A} = 105^\circ$

d) $a = 4$ m; $\hat{B} = 45^\circ$; $\hat{C} = 60^\circ$

e) $b = 5$ m; $\hat{A} = \hat{C} = 35^\circ$

f) $a = b = 10$ cm; $\hat{C} = 40^\circ$

g) $a = 5$ cm; $\hat{A} = 75^\circ$; $\hat{B} = 45^\circ$

h) $a = 16$ cm; $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{C} = 30^\circ$

a) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

$$12^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cos \hat{A}$$

$$144 = 256 + 100 - 320 \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{256 + 100 - 144}{320} = 0,6625$$

$$\hat{A} = 48^\circ 30' 33''$$

• $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$

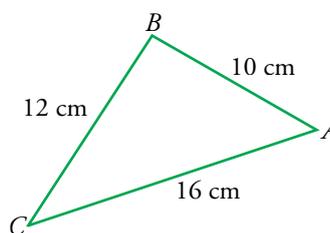
$$256 = 144 + 100 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cos \hat{B}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{144 + 100 - 256}{240} = -0,05$$

$$\hat{B} = 92^\circ 51' 57,5''$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} - \hat{B}$$

$$\hat{C} = 38^\circ 37' 29,5''$$



b) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$
 $c^2 = 7^2 + 22^2 - 2 \cdot 7 \cdot 22 \cos 40^\circ = 49 + 484 - 235,94 = 297,06$
 $c = 17,24 \text{ cm}$

• $\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} \rightarrow \frac{7}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{17,24}{\widehat{\text{sen } 40^\circ}}$

$\widehat{\text{sen } A} = \frac{7 \widehat{\text{sen } 40^\circ}}{17,24} = 0,26$

$\hat{A} = \begin{cases} \hat{A}_1 = 15^\circ 7' 44,3'' \\ \hat{A}_2 = 164^\circ 52' 15,7'' \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$

(La solución \hat{A}_2 no es válida, pues $\hat{A}_2 + \hat{C} > 180^\circ$).

• $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 124^\circ 52' 15,7''$

c) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} = 16 + 9 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cos 105^\circ = 31,21$
 $a = 5,59 \text{ m}$

• $\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} \rightarrow \frac{5,59}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{4}{\widehat{\text{sen } 105^\circ}}$

$\widehat{\text{sen } B} = \frac{4 \cdot \widehat{\text{sen } 105^\circ}}{5,59} = 0,6912$

$\hat{B} = \begin{cases} \hat{B}_1 = 43^\circ 43' 25,3'' \\ \hat{B}_2 = 136^\circ 16' 34,7'' \rightarrow \text{No válida.} \end{cases}$

(La solución \hat{B}_2 no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180^\circ$).

• $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 31^\circ 16' 34,7''$

d) • $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 75^\circ$

• $\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} \rightarrow \frac{4}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } 45^\circ}}$

$b = \frac{4 \cdot \widehat{\text{sen } 45^\circ}}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = 2,93 \text{ m}$

• $\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} \rightarrow \frac{4}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } 60^\circ}}$

$c = \frac{4 \cdot \widehat{\text{sen } 60^\circ}}{\widehat{\text{sen } 75^\circ}} = 3,59 \text{ m}$

e) • $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 110^\circ$

• $\frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} \rightarrow \frac{5}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen } 35^\circ}}$

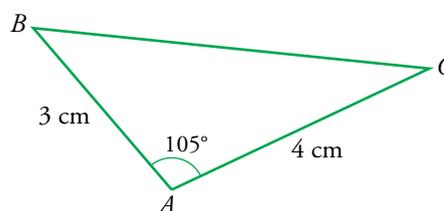
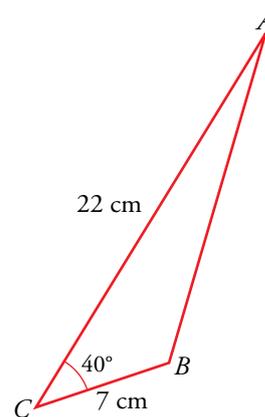
$a = \frac{5 \cdot \widehat{\text{sen } 35^\circ}}{\widehat{\text{sen } 110^\circ}} = 3,05 \text{ m}$

• Como $\hat{A} = \hat{C} \rightarrow a = c \rightarrow c = 3,05 \text{ m}$

f) • Como los lados a y b son iguales, el triángulo es isósceles:

$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - 40^\circ \rightarrow 2\hat{A} = 140^\circ \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 70^\circ$

• $\frac{10}{\widehat{\text{sen } 70^\circ}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } 40^\circ}} \rightarrow c = \frac{10 \cdot \widehat{\text{sen } 40^\circ}}{\widehat{\text{sen } 70^\circ}} = 6,84 \text{ cm}$

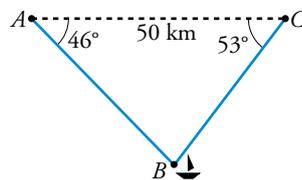


- g) • $\widehat{C} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ = 60^\circ$
- $\frac{5}{\text{sen } 75^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 45^\circ} \rightarrow b = \frac{5 \cdot \text{sen } 45^\circ}{\text{sen } 75^\circ} = 3,66 \text{ cm}$
 - $\frac{5}{\text{sen } 75^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 60^\circ} \rightarrow c = \frac{5 \cdot \text{sen } 60^\circ}{\text{sen } 75^\circ} = 4,48 \text{ cm}$
- h) • $\widehat{B} = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
- $\text{sen } 30^\circ = \frac{c}{16} \rightarrow c = 16 \cdot \text{sen } 30^\circ = 8 \text{ cm}$
 - $\text{cos } 30^\circ = \frac{b}{16} \rightarrow b = 16 \cdot \text{cos } 30^\circ = 13,86 \text{ cm}$

9 Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C , que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos:

$$\widehat{BAC} = 46^\circ \text{ y } \widehat{BCA} = 53^\circ$$

¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?



- $$\widehat{B} = 180^\circ - 46^\circ - 53^\circ = 81^\circ$$
- $\frac{a}{\text{sen } \widehat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} \rightarrow a = \frac{b \text{ sen } \widehat{A}}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{50 \cdot \text{sen } 46^\circ}{\text{sen } 81^\circ} = 36,4 \text{ km}$
 - $\frac{c}{\text{sen } \widehat{C}} = \frac{b}{\text{sen } \widehat{B}} \rightarrow c = \frac{b \text{ sen } \widehat{C}}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{50 \cdot \text{sen } 53^\circ}{\text{sen } 81^\circ} = 40,4 \text{ km}$

Ejercicios y problemas resueltos

Página 120

1. Relaciones entre las razones trigonométricas

Hazlo tú. Si $\cos \alpha = -3/4$ y $180^\circ < \alpha < 270^\circ$, calcula: $\operatorname{sen} \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha$; $\cos(90^\circ - \alpha)$; $\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha)$; $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$; $\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha)$, sin hallar el ángulo α .

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$$

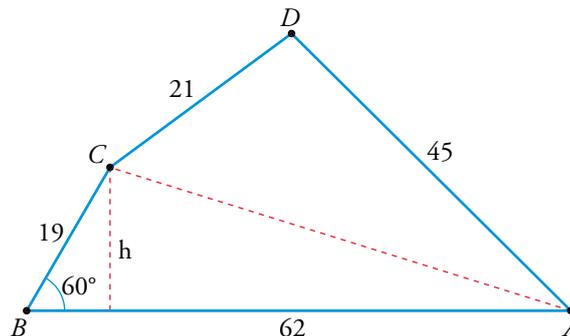
Como α pertenece al tercer cuadrante, su seno es negativo $\rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4} \qquad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3} \qquad \operatorname{sen}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

2. Cálculo del área de una parcela descomponiéndola en triángulos

Hazlo tú. Halla el área del cuadrilátero irregular $ABCD$ sabiendo que $\overline{AB} = 62$ m; $\overline{BC} = 19$ m; $\overline{CD} = 21$ m; $\overline{AD} = 45$ m; $\hat{B} = 60^\circ$.



Trazando la diagonal \overline{AC} descomponemos el cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo ABC :

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{h}{19} \rightarrow h = 19 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = 16,45 \text{ m}$$

$$S_{ABC} = \frac{62 \cdot 16,45}{2} = 509,95 \text{ m}^2$$

- Área del triángulo ACD :

Para poder usar la fórmula de Herón necesitamos el lado \overline{AC} . Por el teorema del coseno:

$$\overline{AC}^2 = 19^2 + 62^2 - 2 \cdot 19 \cdot 62 \cos 60^\circ = 3027 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{3027} = 55,02 \text{ m}$$

Ahora, aplicamos la fórmula de Herón:

$$p = \frac{21 + 45 + 55,02}{2} = 60,51$$

$$S_{ACD} = \sqrt{60,51(60,51 - 21)(60,51 - 45)(60,51 - 55,02)} = 451,19 \text{ m}^2$$

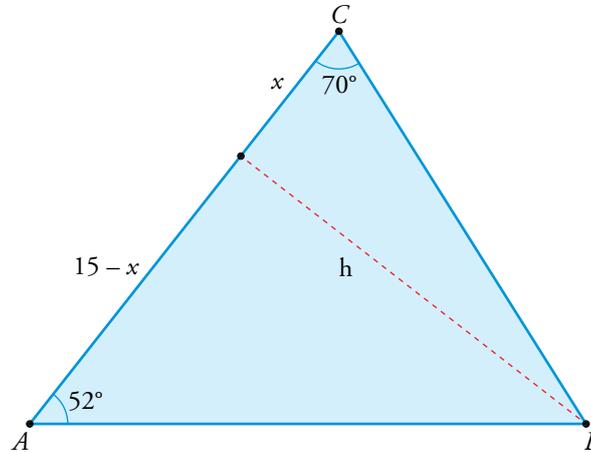
- El área del cuadrilátero es:

$$S_{ABCD} = 509,95 + 451,19 = 961,14 \text{ m}^2$$

Página 121

3. Cálculo de una distancia mediante la estrategia de la altura

Hazlo tú. De un triángulo ABC conocemos $\overline{AC} = 15$ m, $\hat{A} = 52^\circ$ y $\hat{C} = 70^\circ$. Calcula la altura sobre AC .



Llamamos h a la altura trazada sobre el lado \overline{AC} . Dividimos este lado en dos partes, que medirán x y $15 - x$.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 52^\circ &= \frac{h}{15-x} \rightarrow h = (15-x) \cdot \operatorname{tg} 52^\circ \\ \operatorname{tg} 70^\circ &= \frac{h}{x} \rightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow (15-x) \cdot \operatorname{tg} 52^\circ = x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ \rightarrow x = 4,77 \text{ m}$$

Finalmente, $h = x \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = 4,77 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = 13,11$ m.

4. Resolución de un triángulo conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Hazlo tú. Resuelve el triángulo ABC en el que conocemos $a = 12$ cm, $b = 8,3$ cm y $\hat{A} = 110^\circ$.

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{12}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \frac{8,3}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{B} = \frac{8,3 \cdot \operatorname{sen} 110^\circ}{12} = 0,65 \rightarrow \hat{B} \text{ puede ser } 40^\circ 32' 30'' \text{ o bien } 139^\circ 27' 30''$$

Este segundo valor no es posible porque la suma de los ángulos \hat{A} y \hat{B} sería superior a 180° .

Por tanto, $\hat{B} = 40^\circ 32' 30''$.

$$\hat{C} = 180^\circ - (110^\circ + 40^\circ 32' 30'') = 29^\circ 27' 30''$$

Hallamos el lado c usando, de nuevo, el teorema de los senos:

$$\frac{12}{\operatorname{sen} 110^\circ} = \frac{c}{\operatorname{sen} (29^\circ 27' 30'')} \rightarrow c = \frac{12 \cdot \operatorname{sen} (29^\circ 27' 30'')}{\operatorname{sen} 110^\circ} = 6,28 \text{ cm}$$

Página 122

5. Cálculo de los ángulos de un triángulo cuando se conocen los tres lados

Hazlo tú. Halla los ángulos del triángulo ABC en el que $a = 15$ cm, $b = 27$ cm y $c = 38$ cm.

Usando el teorema del coseno, tenemos:

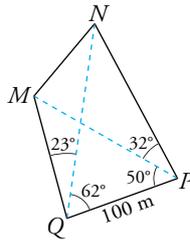
$$38^2 = 15^2 + 27^2 - 2 \cdot 15 \cdot 27 \cos \hat{C} \rightarrow \cos \hat{C} = \frac{490}{-810} \rightarrow \hat{C} = 127^\circ 13' 28''$$

$$27^2 = 38^2 + 15^2 - 2 \cdot 38 \cdot 15 \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{-940}{-1140} \rightarrow \hat{B} = 34^\circ 27' 21''$$

$$\hat{A} = 180^\circ - (127^\circ 13' 28'' + 34^\circ 27' 21'') = 18^\circ 19' 11''$$

6. Cálculo de la distancia entre dos puntos inaccesibles

Hazlo tú. Calcula la distancia \overline{MN} .



- Usando el triángulo PQM podemos calcular el lado \overline{QM} :

El ángulo $\widehat{QMP} = 180^\circ - 50^\circ - 85^\circ = 45^\circ$

$$\frac{\overline{QM}}{\text{sen } 50^\circ} = \frac{100}{\text{sen } 45^\circ} \rightarrow \overline{QM} = \frac{100 \cdot \text{sen } 50^\circ}{\text{sen } 45^\circ} = 108,34 \text{ m}$$

- Usando el triángulo PQN podemos calcular la diagonal \overline{QN} :

El ángulo $\widehat{QNP} = 180^\circ - 62^\circ - 82^\circ = 36^\circ$

$$\frac{\overline{QN}}{\text{sen } 82^\circ} = \frac{100}{\text{sen } 36^\circ} \rightarrow \overline{QN} = \frac{100 \cdot \text{sen } 82^\circ}{\text{sen } 36^\circ} = 168,47 \text{ m}$$

- Ahora usamos el teorema del coseno para hallar \overline{MN} :

$$\overline{MN}^2 = 108,34^2 + 168,47^2 - 2 \cdot 108,34 \cdot 168,47 \cos 23^\circ = 6517,5$$

$$\overline{MN} = \sqrt{6517,5} = 80,73 \text{ m}$$

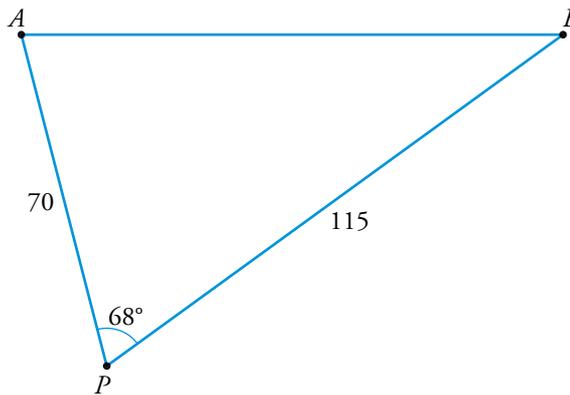
Ejercicios y problemas guiados

Página 123

1. Cálculo de los lados y los ángulos de un triángulo

Desde un punto P observamos los puntos A y B , situados en las orillas opuestas de una laguna, bajo un ángulo de 68° . Sabemos que $\overline{PA} = 70$ m y $\overline{PB} = 115$ m.

Calcular la distancia AB y los ángulos \widehat{PAB} y \widehat{PBA} .



$$\overline{AB}^2 = 70^2 + 115^2 - 2 \cdot 70 \cdot 115 \cos 68^\circ = 12\,093,8$$

$$\overline{AB} = \sqrt{12\,093,8} = 110 \text{ m}$$

$$\frac{115}{\sin \widehat{PAB}} = \frac{110}{\sin 68^\circ} \rightarrow \sin \widehat{PAB} = \frac{115 \cdot \sin 68^\circ}{110} = 0,9693 \rightarrow \widehat{PAB} = 75^\circ 46' 22''$$

$$\widehat{ABP} = 180^\circ - 68^\circ - 75^\circ 46' 22'' = 36^\circ 13' 38''$$

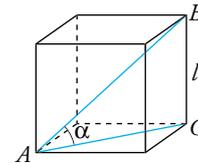
2. Ángulos en un cubo

Hallar el ángulo que forma la diagonal de la cara de un cubo con la diagonal del cubo.

Por el teorema de Pitágoras:

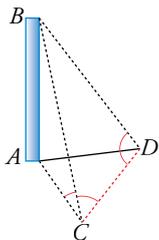
$$\overline{AC}^2 = l^2 + l^2 \rightarrow \overline{AC}^2 = 2l^2 \rightarrow \overline{AC} = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \alpha = 35^\circ 15' 52''$$



3. Resolución de triángulos: altura de una torre

Para medir la altura de la torre AB , nos situamos en los puntos C y D y tomamos estas medidas:



$$\overline{CD} = 15 \text{ m}; \widehat{ACB} = 40^\circ$$

$$\widehat{BCD} = 58^\circ; \widehat{BDC} = 70^\circ$$

¿Qué altura tiene la torre?

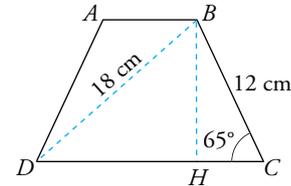
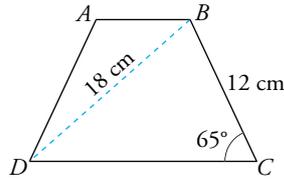
$$\widehat{B} = 180^\circ - 58^\circ - 70^\circ = 52^\circ$$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 70^\circ} = \frac{15}{\sin 52^\circ} \rightarrow \overline{BC} = \frac{15 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 52^\circ} = 17,89 \text{ m}$$

$$\sin 40^\circ = \frac{\overline{AB}}{17,89} \rightarrow \overline{AB} = 17,89 \cdot \sin 40^\circ = 11,5 \text{ m}$$

4. Área y perímetro de un trapecio

Hallar el perímetro y el área de este trapecio isósceles:



$$\overline{BH} = 12 \cdot \text{sen } 65^\circ = 10,88$$

$$\overline{HC} = 12 \cdot \text{cos } 65^\circ = 5,07$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$\overline{DH}^2 = 18^2 - 10,88^2 = 205,63 \rightarrow \overline{DH} = \sqrt{205,63} = 14,34$$

$$\overline{DC} = 14,34 + 5,07 = 19,41$$

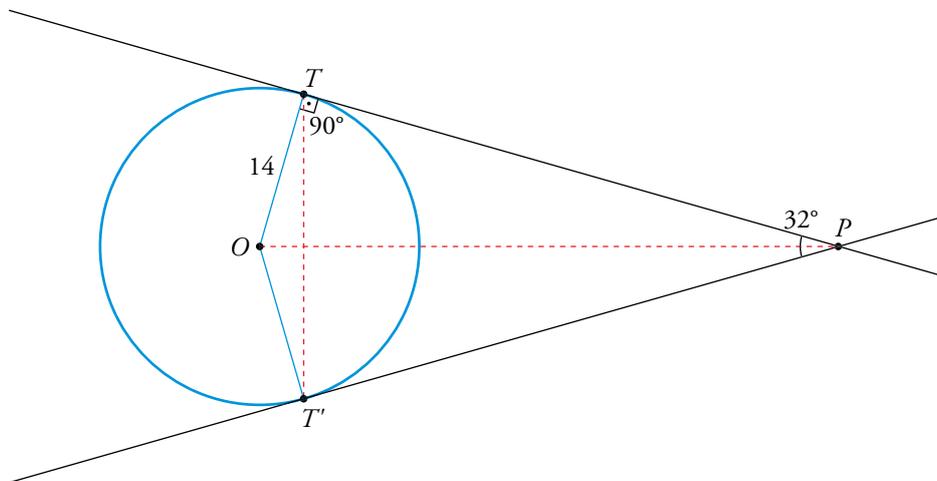
$$\overline{AB} = 19,41 - 2 \cdot 5,07 = 9,27 \text{ ya que el trapecio es isósceles.}$$

$$\text{Finalmente, } S_{ABCD} = \frac{19,41 + 9,27}{2} \cdot 10,88 = 156,02 \text{ cm}^2$$

5. Tangentes a una circunferencia: distancias

Las tangentes trazadas desde el punto P a una circunferencia de centro O y de 14 cm de radio forman un ángulo de 32° . Calcular:

- La distancia de P al centro de la circunferencia.
- La longitud de la cuerda que une los puntos de tangencia.



$$\text{a) } \text{sen } 16^\circ = \frac{14}{\overline{OP}} \rightarrow \overline{OP} = \frac{14}{\text{sen } 16^\circ} = 50,79 \text{ cm}$$

$$\text{b) } \widehat{TOT'} = 360^\circ - 32^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 148^\circ$$

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo OTT' :

$$\overline{TT'}^2 = 14^2 + 14^2 - 2 \cdot 14 \cdot 14 \text{cos } 148^\circ = 724,43 \rightarrow \overline{TT'} = \sqrt{724,43} = 26,9 \text{ cm}$$

Ejercicios y problemas propuestos

Página 124

Para practicar

Razones trigonométricas. Relaciones entre ellas

1 Utiliza las relaciones fundamentales para hallar las demás razones trigonométricas de los ángulos α , β y γ .

a) $\cos \alpha = \sqrt{5}/3$

b) $\sin \beta = 3/5$

c) $\operatorname{tg} \gamma = 3$

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + \frac{5}{9} = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{9} \rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{2}{3}$

• Si $\sin \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

• Si $\sin \alpha = -\frac{2}{3} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2\sqrt{5}}{5}$

b) $\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \frac{9}{25} + \cos^2 \beta = 1 \rightarrow \cos^2 \beta = \frac{16}{25} \rightarrow \cos \beta = \pm \frac{4}{5}$

• Si $\cos \beta = \frac{4}{5} \rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

• Si $\cos \beta = -\frac{4}{5} \rightarrow \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

c) $\frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = 3 \rightarrow \sin \gamma = 3 \cos \gamma$

$\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1 \rightarrow (3 \cos \gamma)^2 + \cos^2 \gamma = 1 \rightarrow 10 \cos^2 \gamma = 1 \rightarrow \cos \gamma = \pm \sqrt{\frac{1}{10}} = \pm \frac{1}{\sqrt{10}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$

• Si $\cos \gamma = \frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow \sin \gamma = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

• Si $\cos \gamma = -\frac{\sqrt{10}}{10} \rightarrow \sin \gamma = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2 Copia en tu cuaderno la siguiente tabla y complétala calculando las razones trigonométricas que faltan en cada caso:

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	0,3		
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$		-0,6	
$180^\circ < \alpha < 270^\circ$			2
$270^\circ < \alpha < 360^\circ$			$-\sqrt{5}$

• 1.ª fila:

Como el ángulo está en el primer cuadrante, su coseno es positivo.

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow 0,09 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 0,91 \rightarrow \cos \alpha = 0,954$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,3}{0,954} = 0,314$

• 2.ª fila:

Como el ángulo está en el segundo cuadrante, su seno es positivo.

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha + 0,36 = 1 \rightarrow \sin^2 \alpha = 0,64 \rightarrow \sin \alpha = 0,8$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{0,8}{-0,6} = -\frac{4}{3}$

- 3.ª fila:

Como el ángulo está en el tercer cuadrante, su seno y su coseno son negativos.

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = 2 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow 4 \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow 5 \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

- 4.ª fila:

Como el ángulo está en el cuarto cuadrante, su seno es negativo y su coseno es positivo.

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = -\sqrt{5} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{5} \operatorname{cos} \alpha$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow 5 \operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow 6 \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{1}{6} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = -\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{6}}{6} = -\frac{\sqrt{30}}{6}$$

	$\operatorname{sen} \alpha$	$\operatorname{cos} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	0,3	0,95	0,31
$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	0,8	-0,6	-4/3
$180^\circ < \alpha < 270^\circ$	$-2\sqrt{5}/5$	$-\sqrt{5}/5$	2
$270^\circ < \alpha < 360^\circ$	$-\sqrt{30}/6$	$\sqrt{6}/6$	$-\sqrt{5}$

3 Halla, en cada caso, las razones trigonométricas de α :

a) $\operatorname{sen} \alpha = -2/3$; $\operatorname{cos} \alpha < 0$

b) $\operatorname{cos} \alpha = 5/6$; $\operatorname{tg} \alpha < 0$

c) $\operatorname{tg} \alpha = 2,25$; $\operatorname{sen} \alpha < 0$

d) $\operatorname{cos} \alpha = -\sqrt{5}/4$; $\operatorname{sen} \alpha < 0$

a) Como $\operatorname{cos} \alpha < 0$, $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \frac{4}{9} + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{cos}^2 \alpha = \frac{5}{9} \rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

b) Como $\operatorname{tg} \alpha < 0$, $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{25}{36} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{11}{36} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{11}}{6}}{\frac{5}{6}} = -\frac{\sqrt{11}}{5}$$

c) $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha} = 2,25 \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = 2,25 \operatorname{cos} \alpha$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow (2,25 \operatorname{cos} \alpha)^2 + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow 6,0625 \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \operatorname{cos} \alpha = -\sqrt{\frac{1}{6,0625}} = -0,4061 \text{ (tiene el mismo signo que } \operatorname{sen} \alpha \text{ por ser } \operatorname{tg} \alpha > 0)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = 2,25 \operatorname{cos} \alpha = 2,25 \cdot (-0,4061) = -0,9137$$

d) Como $\operatorname{sen} \alpha < 0$, $\operatorname{sen}^2 \alpha + \operatorname{cos}^2 \alpha = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{5}{16} = 1 \rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{11}{16} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = -\frac{\sqrt{11}}{4}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{11}}{4}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{55}}{5}$$

4 Sabiendo que $\cos \alpha = 0,8$ y $\sen \alpha = 0,6$ calcula:

- | | | |
|--------------------------------|--------------------------------|--|
| a) $\cos (180^\circ + \alpha)$ | b) $\sen (180^\circ - \alpha)$ | c) $\operatorname{tg} (-\alpha)$ |
| d) $\sen (90^\circ - \alpha)$ | e) $\cos (90^\circ + \alpha)$ | f) $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)$ |
- a) $\cos (180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha = -0,8$ b) $\sen (180^\circ - \alpha) = \sen \alpha = 0,6$
- c) $\operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{0,6}{0,8} = -\frac{3}{4}$ d) $\sen (90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = 0,8$
- e) $\cos (90^\circ + \alpha) = -\sen \alpha = -0,6$ f) $\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3}$

5 Si sabemos que $\sen 42^\circ = 0,67$, $\cos 42^\circ = 0,74$ y $\operatorname{tg} 42^\circ = 0,9$, di el valor de las siguientes razones trigonométricas sin utilizar la calculadora:

- | | | |
|----------------------------------|-----------------------|----------------------------------|
| a) $\cos 48^\circ$ | b) $\sen (-48^\circ)$ | c) $\sen 138^\circ$ |
| d) $\operatorname{tg} 318^\circ$ | e) $\cos 222^\circ$ | f) $\operatorname{tg} 858^\circ$ |
- a) $\cos 48^\circ = \cos (90^\circ - 42^\circ) = \sen 42^\circ = 0,67$
- b) $\sen (-48^\circ) = -\sen 48^\circ = -\sen (90^\circ - 42^\circ) = -\cos 42^\circ = -0,74$
- c) $\sen 138^\circ = \sen (180^\circ - 42^\circ) = \sen 42^\circ = 0,67$
- d) $\operatorname{tg} 318^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ - 42^\circ) = \operatorname{tg} (-42^\circ) = -\operatorname{tg} 42^\circ = -0,9$
- e) $\cos 222^\circ = \cos (180^\circ + 42^\circ) = -\cos 42^\circ = -0,74$
- f) $\operatorname{tg} 858^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ \cdot 2 + 138^\circ) = \operatorname{tg} 138^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 42^\circ) = -\operatorname{tg} 42^\circ = -0,9$

6 Expresa con un ángulo del primer cuadrante las siguientes razones trigonométricas y di su valor exacto sin usar la calculadora:

- | | | |
|----------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| a) $\sen 135^\circ$ | b) $\cos 240^\circ$ | c) $\operatorname{tg} 120^\circ$ |
| d) $\cos 1845^\circ$ | e) $\operatorname{tg} 1125^\circ$ | f) $\sen (-120^\circ)$ |
- a) $\sen 135^\circ = \sen (90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- b) $\cos 240^\circ = \cos (180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$
- c) $\operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} (180^\circ - 60^\circ) = -\operatorname{tg} 60^\circ = -\sqrt{3}$
- d) $\cos 1845^\circ = \cos (360^\circ \cdot 5 + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- e) $\operatorname{tg} 1125^\circ = \operatorname{tg} (360^\circ \cdot 3 + 45^\circ) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$
- f) $\sen (-120^\circ) = -\sen 120^\circ = -\sen (180^\circ - 60^\circ) = -\sen 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

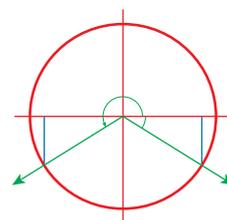
7 Halla con la calculadora el valor del ángulo α :

- a) $\sen \alpha = -0,75$; $\alpha < 270^\circ$
- b) $\cos \alpha = -0,37$; $\alpha > 180^\circ$
- c) $\operatorname{tg} \alpha = 1,38$; $\sen \alpha < 0$
- d) $\cos \alpha = 0,23$; $\sen \alpha < 0$

a) Con la calculadora $\rightarrow \alpha = -48^\circ 35' 25'' \in 4.^\circ$ cuadrante

Como debe ser $\begin{cases} \sen \alpha < 0 \\ \alpha < 270^\circ \end{cases} \rightarrow \alpha \in 3.^\circ$ cuadrante

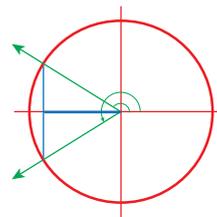
Luego $\alpha = 180^\circ + 48^\circ 35' 25'' = 228^\circ 35' 25''$



b) Con la calculadora: $111^\circ 42' 56,3''$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha < 0 \\ \alpha > 180^\circ \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \in 3.^{\text{er}} \text{ cuadrante}$$

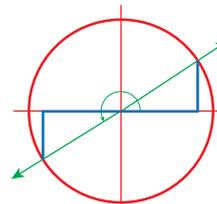
Luego $\alpha = 360^\circ - 111^\circ 42' 56,3'' = 248^\circ 17' 3,7''$.



c) $\left. \begin{array}{l} \text{tg } \alpha = 1,38 > 0 \\ \text{sen } \alpha < 0 \end{array} \right\} \cos < 0 \rightarrow \alpha \in 3.^{\text{er}} \text{ cuadrante}$

Con la calculadora: $\text{tg}^{-1} 1,38 = 54^\circ 4' 17,39''$

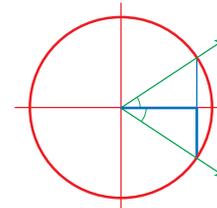
$\alpha = 180^\circ + 54^\circ 4' 17,39'' = 234^\circ 4' 17,4''$



d) $\left. \begin{array}{l} \cos \alpha = 0,23 > 0 \\ \text{sen } \alpha < 0 \end{array} \right\} \rightarrow \alpha \in 4.^{\circ} \text{ cuadrante}$

Con la calculadora: $\cos^{-1} 0,23 = 76^\circ 42' 10,5''$

$\alpha = -76^\circ 42' 10,5'' = 283^\circ 17' 49,6''$



8 a) Representa un ángulo α tal que $\cos \alpha = -\frac{3}{8}$ y $\text{sen } \alpha < 0$. Halla $\text{sen } \alpha$ y $\text{tg } \alpha$.

b) Di el valor de las razones siguientes:

$\text{tg}(180^\circ - \alpha)$; $\cos(90^\circ - \alpha)$; $\text{sen}(180^\circ + \alpha)$ $\text{sen}(-\alpha)$; $\text{tg}(90^\circ + \alpha)$; $\cos(360^\circ - \alpha)$

a) $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \text{sen}^2 \alpha + \frac{9}{64} = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen}^2 \alpha = \frac{55}{64} \rightarrow \text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{55}}{8}$

$\text{tg } \alpha = \frac{-\frac{\sqrt{55}}{8}}{-\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt{55}}{3}$

b) $\text{tg}(180^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha = -\frac{\sqrt{55}}{3}$

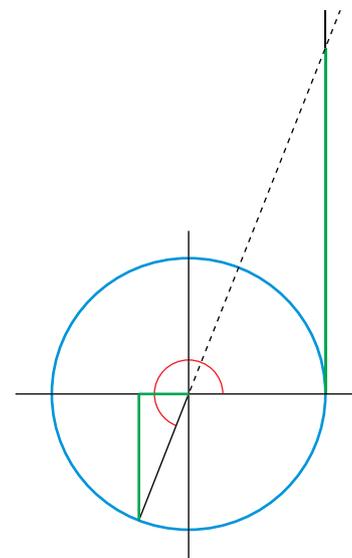
$\cos(90^\circ - \alpha) = \text{sen } \alpha = -\frac{\sqrt{55}}{8}$

$\text{sen}(180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{55}}{8}$

$\text{tg}(90^\circ + \alpha) = \frac{-1}{\text{tg } \alpha} = -\frac{3}{\sqrt{55}} = -\frac{3\sqrt{55}}{55}$

$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos \alpha = -\frac{3}{8}$



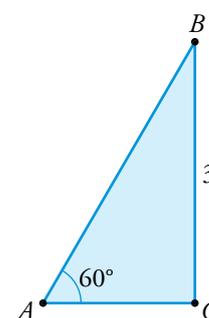
Resolución de triángulos rectángulos

9 Para llegar a una altura de 3 m, apoyamos una escalera formando un ángulo de 60° con el suelo. Halla la longitud de la escalera y la distancia desde su base hasta la pared.

El suelo, la escalera y la pared forman un triángulo rectángulo.

$\text{sen } 60^\circ = \frac{3}{c} \rightarrow \text{Longitud de la escalera} = c = \frac{3}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 3,46 \text{ m}$

$\text{tg } 60^\circ = \frac{3}{b} \rightarrow \text{Distancia desde la base a la pared} = b = \frac{3}{\text{tg } 60^\circ} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = 1,73 \text{ m}$



- 10** Una persona que mide 1,78 m proyecta una sombra de 85 cm. ¿Qué ángulo forman los rayos del sol con la horizontal?

El cociente entre la altura y la sombra es la tangente del ángulo α que forma el sol con la horizontal.

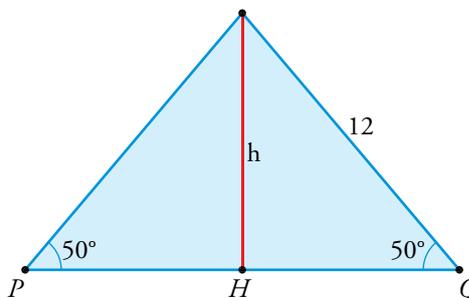
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,78}{0,85} = 2,094 \rightarrow \alpha = 64^\circ 28' 27''$$

- 11** Un mástil está sujeto a tierra con dos cables de 12 m que forman ángulos de 50° con el suelo. Calcula la altura del mástil y la distancia de la base a los puntos de sujeción.

Altura del poste = $h = 12 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ = 9,19$ m

La distancia de la base al punto de sujeción es:

$$\overline{HQ} = 12 \cdot \operatorname{cos} 50^\circ = 7,71$$
 m



- 12** En un triángulo isósceles, el lado desigual mide 10 m y el ángulo opuesto es de 40° . Halla el perímetro y el área del triángulo.

La medida de los ángulos iguales es $\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

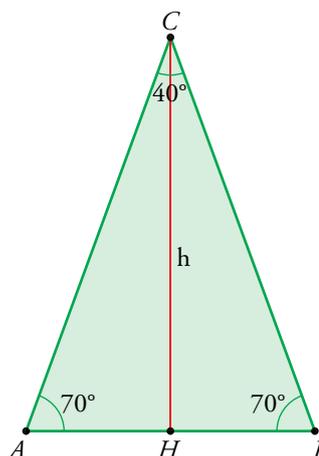
$$\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{h}{5} \rightarrow h = 5 \cdot \operatorname{tg} 70^\circ = 13,74$$
 m

$$S_{\text{TRIÁNGULO}} = \frac{10 \cdot 13,74}{2} = 68,7$$
 m²

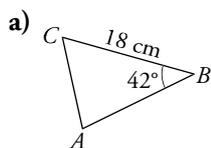
$$\operatorname{cos} 70^\circ = \frac{5}{BC} \rightarrow BC = \frac{5}{\operatorname{cos} 70^\circ} = 14,62$$
 m

El perímetro del triángulo ABC es:

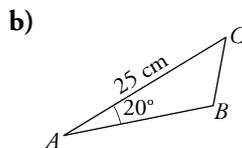
$$P = 2 \cdot 14,62 + 10 = 39,24$$
 m



- 13** Calcula la altura trazada desde C en cada uno de los triángulos siguientes:



a) $h = 18 \cdot \operatorname{sen} 42^\circ = 12,04$ cm



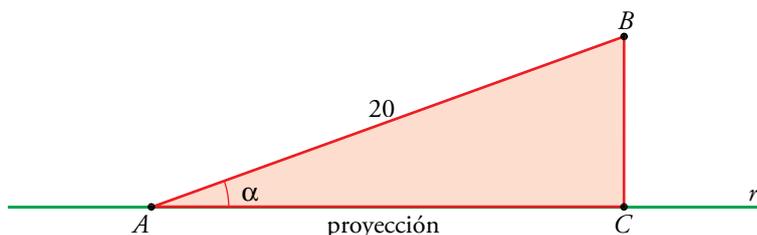
b) $h = 25 \cdot \operatorname{sen} 20^\circ = 8,55$ cm

- 14** Halla, en cada caso, la proyección de un segmento de 20 cm de longitud sobre una recta r con la que forma un ángulo α :

a) $\alpha = 20^\circ$

b) $\alpha = 45^\circ$

c) $\alpha = 80^\circ$



Podemos obtener la proyección usando el coseno del ángulo α .

a) $\overline{AC} = 20 \cdot \operatorname{cos} 20^\circ = 18,79$ cm

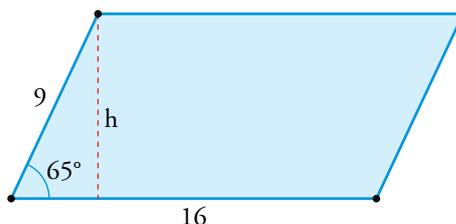
b) $\overline{AC} = 20 \cdot \operatorname{cos} 45^\circ = 14,14$ cm

c) $\overline{AC} = 20 \cdot \operatorname{cos} 80^\circ = 3,47$ cm

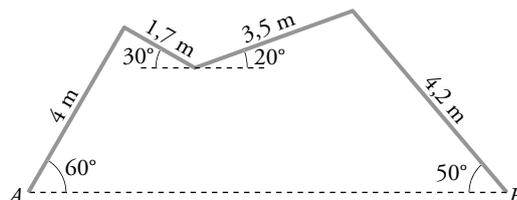
- 15** Calcula el área de un paralelogramo cuyos lados, de 9 cm y 16 cm, forman un ángulo de 65°.

$$h = 9 \cdot \operatorname{sen} 65^\circ = 8,16 \text{ cm}$$

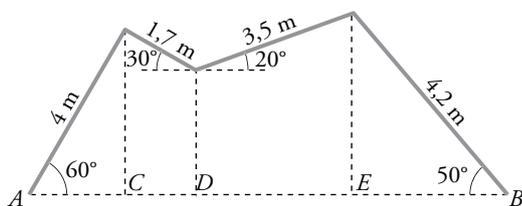
$$\text{La superficie es } S = 16 \cdot 8,16 = 130,56 \text{ cm}^2$$



- 16** El tejado de una casa tiene la forma y las medidas que se indican en la figura. Calcula la distancia \overline{AB} .



Trazamos perpendiculares del segmento \overline{AB} que pasen por los tres vértices superiores. Esas rectas dividen al segmento \overline{AB} en 4 partes. Las longitudes de estos segmentos, de izquierda a derecha son:



$$\overline{AC} = 4 \cdot \cos 60^\circ = 2 \text{ m}$$

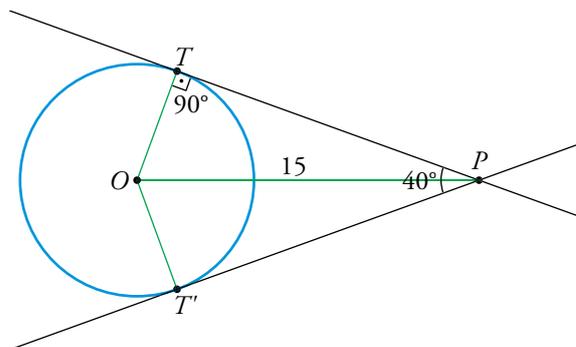
$$\overline{CD} = 1,7 \cdot \cos 30^\circ = 1,47 \text{ m}$$

$$\overline{DE} = 3,5 \cdot \cos 20^\circ = 3,29 \text{ m}$$

$$\overline{EB} = 4,2 \cdot \cos 50^\circ = 2,7 \text{ m}$$

$$\text{La longitud total es: } \overline{AB} = 2 + 1,47 + 3,29 + 2,7 = 9,46 \text{ m}$$

- 17** Desde un punto P exterior a una circunferencia se trazan las tangentes que forman entre sí un ángulo de 40°. Si la distancia de P al centro de la circunferencia es de 15 cm, ¿cuál es su radio?



$$\text{El radio } \overline{OT} \text{ es el cateto opuesto al ángulo de } 20^\circ = \frac{40^\circ}{2}, \text{ luego } \overline{OT} = 15 \cdot \operatorname{sen} 20^\circ = 5,13 \text{ cm.}$$

- 18** En un triángulo ABC , rectángulo en A , se conocen un cateto y la altura sobre la hipotenusa:

$$\overline{AC} = 15 \text{ m} \quad \overline{AD} = 12 \text{ m}$$

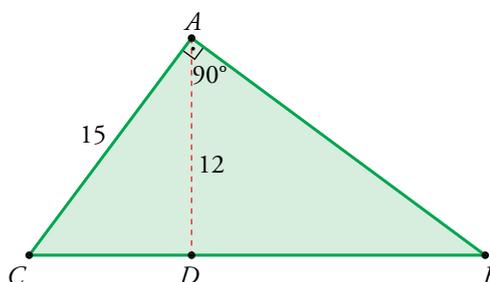
Halla los lados y los ángulos del triángulo.

$$\operatorname{sen} \hat{C} = \frac{12}{15} = 0,8 \rightarrow \hat{C} = 53^\circ 7' 48''$$

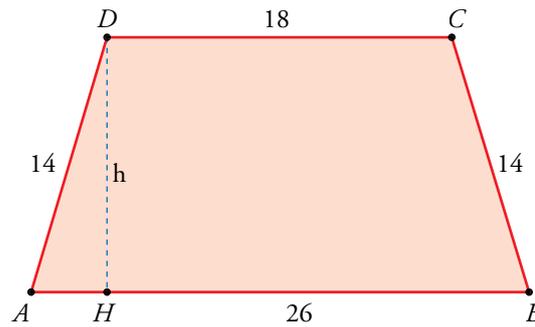
$$\hat{B} = 90^\circ - 53^\circ 7' 48'' = 36^\circ 52' 12''$$

$$\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{12}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{12}{\operatorname{sen} \hat{B}} = 20 \text{ m}$$

$$\text{Por el teorema de Pitágoras, } \overline{BC} = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \text{ m.}$$



- 19** Las bases de un trapecio isósceles miden 18 cm y 26 cm, y los lados iguales, 14 cm. Calcula sus ángulos y su área.



$$\overline{AH} = \frac{26-18}{2} = 4 \text{ cm por ser isósceles.}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{4}{14} = 0,2857 \rightarrow \hat{A} = \hat{B} = 73^\circ 23' 54''$$

Como los ángulos interiores de un cuadrilátero suman 360° :

$$\hat{C} = \hat{D} = \frac{360^\circ - 2 \cdot (73^\circ 23' 54'')}{2} = 180^\circ - 73^\circ 23' 54'' = 106^\circ 36' 6''$$

Para calcular la superficie necesitamos la altura: $h = 14 \cdot \text{sen } \hat{A} = 13,42 \text{ cm}$

$$S_{ABCD} = \frac{26+18}{2} \cdot 13,42 = 295,24 \text{ cm}^2$$

Página 125

Resolución de triángulos cualesquiera

- 20** Aplica el teorema de los senos para resolver el triángulo ABC en los siguientes casos:

a) $\hat{A} = 55^\circ$, $\hat{B} = 40^\circ$, $c = 15 \text{ m}$

b) $\hat{A} = 50^\circ$, $a = 23 \text{ m}$, $c = 18 \text{ m}$

c) $\hat{A} = 35^\circ$, $\hat{C} = 42^\circ$, $b = 17 \text{ m}$

d) $\hat{B} = 105^\circ$, $b = 30 \text{ m}$, $a = 18 \text{ m}$

a) $\hat{C} = 180^\circ - 55^\circ - 40^\circ = 85^\circ$; $\frac{a}{\text{sen } 55^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 40^\circ} = \frac{15}{\text{sen } 85^\circ}$

$$a = \frac{15 \cdot \text{sen } 55^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = 12,33 \text{ cm}; \quad b = \frac{15 \cdot \text{sen } 40^\circ}{\text{sen } 85^\circ} = 9,68 \text{ cm}$$

b) $\frac{23}{\text{sen } 50^\circ} = \frac{18}{\text{sen } \hat{C}} \rightarrow \text{sen } \hat{C} = \frac{18 \cdot \text{sen } 50^\circ}{23} = 0,6 \rightarrow \hat{C} = 36^\circ 52' 12''$

$$\hat{B} = 180^\circ - 50^\circ - 36^\circ 52' 12'' = 93^\circ 7' 48''$$

$$\frac{23}{\text{sen } 50^\circ} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \rightarrow b = \frac{23 \cdot \text{sen } \hat{B}}{\text{sen } 50^\circ} = 30 \text{ cm}$$

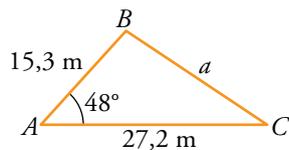
c) $\hat{B} = 180^\circ - (35^\circ + 42^\circ) = 103^\circ$; $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow a = \frac{17 \cdot \text{sen } 35^\circ}{\text{sen } 103^\circ} = 10 \text{ m}$

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \rightarrow c = \frac{17 \cdot \text{sen } 42^\circ}{\text{sen } 103^\circ} \rightarrow c = 11,67 \text{ m}$$

d) $\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow \text{sen } \hat{A} = \frac{18 \cdot \text{sen } 105^\circ}{30} \rightarrow \hat{A} = 35^\circ 25' 9''$; $\hat{C} = 39^\circ 34' 51''$

$$\frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \rightarrow c = \frac{30 \cdot \text{sen } 39^\circ 34' 51''}{\text{sen } 105^\circ} \rightarrow c = 19,79 \text{ m}$$

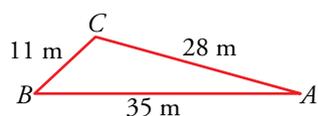
- 21** Aplica el teorema del coseno para hallar el lado a del triángulo ABC , en el que $\hat{A} = 48^\circ$, $b = 27,2$ m y $c = 15,3$ m.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

$$a^2 = 27,2^2 + 15,3^2 - 2 \cdot 27,2 \cdot 15,3 \cos 48^\circ \rightarrow a = 20,42 \text{ m}$$

- 22** Halla los ángulos del triángulo ABC en el que $a = 11$ m, $b = 28$ m y $c = 35$ m.



$$11^2 = 28^2 + 35^2 - 2 \cdot 28 \cdot 35 \cos \hat{A} \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos \hat{A} = \frac{28^2 + 35^2 - 11^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} \rightarrow \hat{A} = 15^\circ 34' 41''$$

$$28^2 = 11^2 + 35^2 - 2 \cdot 11 \cdot 35 \cos \hat{B} \rightarrow \cos \hat{B} = \frac{11^2 + 35^2 - 28^2}{2 \cdot 11 \cdot 35} \rightarrow \hat{B} = 43^\circ 7' 28''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 121^\circ 17' 51''$$

- 23** Resuelve los siguientes triángulos:

a) $b = 32$ cm, $a = 17$ cm, $\hat{C} = 40^\circ$

b) $a = 85$ cm, $c = 57$ cm, $\hat{B} = 65^\circ$

c) $a = 23$ cm, $b = 14$ cm, $c = 34$ cm

a) $c^2 = 32^2 + 17^2 - 2 \cdot 32 \cdot 17 \cos 40^\circ \rightarrow c = 21,9$ cm

$$17^2 = 32^2 + 21,9^2 - 2 \cdot 32 \cdot 21,9 \cos \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 29^\circ 56' 8''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) \rightarrow \hat{B} = 110^\circ 3' 52''$$

b) $b^2 = 85^2 + 57^2 - 2 \cdot 85 \cdot 57 \cos 65^\circ \rightarrow b = 79,87$ cm

$$57^2 = 85^2 + 79,87^2 - 2 \cdot 85 \cdot 79,87 \cos \hat{C} \rightarrow \hat{C} = 40^\circ 18' 5''$$

$$\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) \rightarrow \hat{A} = 74^\circ 41' 55''$$

c) $23^2 = 14^2 + 34^2 - 2 \cdot 14 \cdot 34 \cos \hat{A} \rightarrow \hat{A} = 30^\circ 10' 29''$

$$14^2 = 23^2 + 34^2 - 2 \cdot 23 \cdot 34 \cos \hat{B} \rightarrow \hat{B} = 17^\circ 48' 56''$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) \rightarrow \hat{C} = 133^\circ 0' 35''$$

- 24** Resuelve los siguientes triángulos:

a) $a = 100$ m, $\hat{B} = 47^\circ$, $\hat{C} = 63^\circ$

c) $a = 70$ m, $b = 55$ m, $\hat{C} = 73^\circ$

e) $a = 25$ m, $b = 30$ m, $c = 40$ m

g) $a = 15$ m, $b = 9$ m, $\hat{A} = 130^\circ$

b) $b = 17$ m, $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{C} = 35^\circ$

d) $a = 122$ m, $c = 200$ m, $\hat{B} = 120^\circ$

f) $a = 100$ m, $b = 185$ m, $c = 150$ m

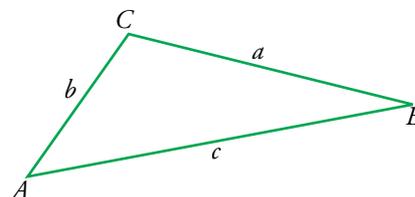
h) $b = 6$ m, $c = 8$ m, $\hat{C} = 57^\circ$

a) $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 70^\circ$

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} \rightarrow \frac{100}{\text{sen } 70^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 47^\circ} \rightarrow$$

$$\rightarrow b = \frac{100 \cdot \text{sen } 47^\circ}{\text{sen } 70^\circ} = 77,83 \text{ m}$$

$$\frac{100}{\text{sen } 70^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 63^\circ} \rightarrow c = \frac{100 \cdot \text{sen } 63^\circ}{\text{sen } 70^\circ} = 94,82 \text{ m}$$



b) • $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 75^\circ$

• $\frac{17}{\text{sen } 75^\circ} = \frac{a}{\text{sen } 70^\circ} \rightarrow a = \frac{17 \cdot \text{sen } 70^\circ}{\text{sen } 75^\circ} = 16,54 \text{ m}$

• $\frac{17}{\text{sen } 75^\circ} = \frac{c}{\text{sen } 35^\circ} \rightarrow c = \frac{17 \cdot \text{sen } 35^\circ}{\text{sen } 75^\circ} = 10,09 \text{ m}$

c) • $c^2 = 70^2 + 55^2 - 2 \cdot 70 \cdot 55 \cdot \cos 73^\circ = 5673,74 \rightarrow c = 75,3 \text{ m}$

• $70^2 = 55^2 + 75,3^2 - 2 \cdot 55 \cdot 75,3 \cdot \cos \hat{A} \rightarrow$

$\rightarrow \cos \hat{A} = \frac{55^2 + 75,3^2 - 70^2}{2 \cdot 55 \cdot 75,3} = 0,4582 \rightarrow \hat{A} = 62^\circ 43' 49,4''$

• $\hat{B} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{C}) = 44^\circ 16' 10,6''$

d) • $b^2 = 122^2 + 200^2 - 2 \cdot 122 \cdot 200 \cos 120^\circ = 79284 \rightarrow b = 281,6 \text{ m}$

• $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \rightarrow$

$\rightarrow \cos \hat{A} = \frac{281,6^2 + 200^2 - 12^2}{2 \cdot 281,6 \cdot 200} = 0,92698 \rightarrow \hat{A} = 22^\circ 1' 54,45''$

• $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 37^\circ 58' 55,5''$

e) • $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \rightarrow$

$\rightarrow \cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{30^2 + 40^2 - 25^2}{2 \cdot 30 \cdot 40} = 0,7812 \rightarrow \hat{A} = 38^\circ 37' 29,4''$

• $\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25^2 + 40^2 - 30^2}{2 \cdot 25 \cdot 40} = 0,6625 \rightarrow \hat{B} = 48^\circ 30' 33''$

• $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 92^\circ 51' 57,6''$

f) • $\cos \hat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{185^2 + 150^2 - 100^2}{2 \cdot 185 \cdot 150} = 0,84189 \rightarrow \hat{A} = 32^\circ 39' 34,4''$

• $\cos \hat{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{100^2 + 150^2 - 185^2}{2 \cdot 100 \cdot 150} = -0,0575 \rightarrow \hat{B} = 93^\circ 17' 46,7''$

• $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 54^\circ 2' 38,9''$

g) • $\frac{15}{\text{sen } 130^\circ} = \frac{9}{\text{sen } \hat{B}} \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{9 \cdot \text{sen } 130^\circ}{15} = 0,4596 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 27^\circ 21' 46,8'' \\ \hat{B}_2 = 152^\circ 38' 13,2'' \end{cases} \rightarrow \text{No válida}$

La solución \hat{B}_2 no es válida, pues $\hat{A} + \hat{B}_2 > 180^\circ$.

• $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 22^\circ 38' 13,2''$

• $\frac{15}{\text{sen } 130^\circ} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \rightarrow c = \frac{15 \cdot \text{sen } \hat{C}}{\text{sen } 130^\circ} = 7,54 \text{ m}$

h) • $\frac{8}{\text{sen } 57^\circ} = \frac{6}{\text{sen } \hat{B}} \rightarrow \text{sen } \hat{B} = \frac{6 \cdot \text{sen } 57^\circ}{8} = 0,6290 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{cases} \hat{B}_1 = 38^\circ 58' 35,7'' \\ \hat{B}_2 = 141^\circ 1' 24,3'' \end{cases} \rightarrow \text{No válida}$

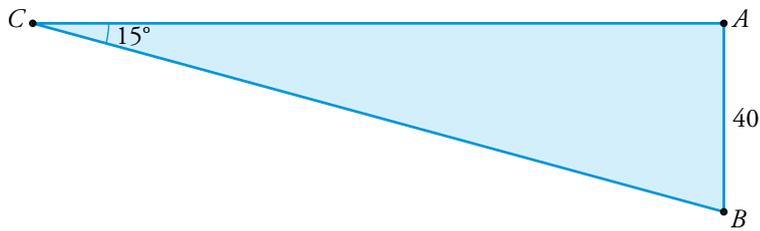
La solución \hat{B}_2 no es válida, pues $\hat{C} + \hat{B}_2 > 180^\circ$.

• $\hat{A} = 180^\circ - (\hat{B} + \hat{C}) = 84^\circ 1' 24,3''$

• $\frac{8}{\text{sen } 57^\circ} = \frac{a}{\text{sen } \hat{A}} \rightarrow a = \frac{8 \cdot \text{sen } \hat{A}}{\text{sen } 57^\circ} = 9,5 \text{ m}$

Para resolver

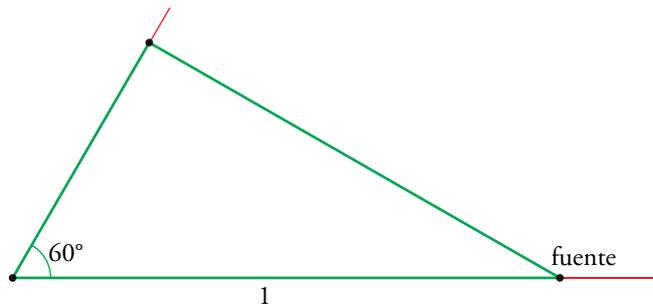
- 25** El radar de un barco detecta un objeto no identificado a 40 m de profundidad y en una dirección que forma 15° con la horizontal. ¿Qué distancia tiene que recorrer un buzo para llegar desde el barco hasta el objeto?



El buzo tiene que recorrer la distancia \overline{BC} .

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \frac{40}{\overline{BC}} \rightarrow \overline{BC} = \frac{40}{\operatorname{sen} 15^\circ} = 145,55 \text{ m}$$

- 26** Dos senderos rectos se cruzan formando un ángulo de 60° . En uno de ellos, a un kilómetro del cruce, hay una fuente. ¿Cuál es la distancia más corta que hay desde la fuente al otro sendero si vamos campo a través?

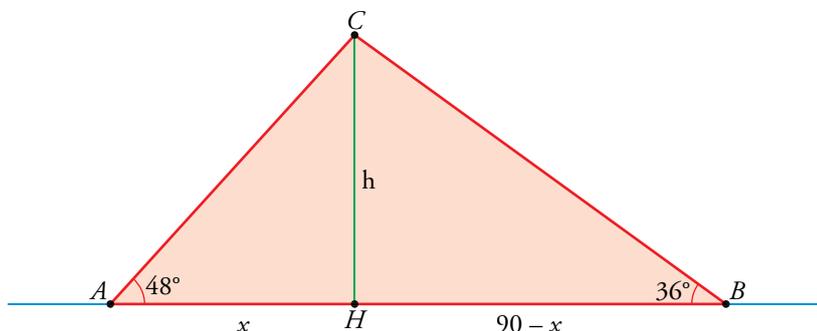


La distancia más corta se da en la perpendicular desde la fuente al otro camino.

Podemos calcularla usando el seno del ángulo opuesto a la perpendicular.

$$\text{Distancia} = 1 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 \text{ km}$$

- 27** Una antena de radio está sujeta al suelo con dos cables que forman con el suelo ángulos de 36° y 48° . Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre sí 90 m. Calcula la altura de la antena.



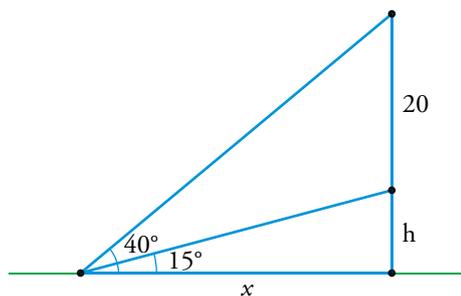
Llamemos x al segmento \overline{AH} . Entonces, el segmento \overline{HB} será $90 - x$.

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{tg} 48^\circ = \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 36^\circ = \frac{h}{90 - x} \end{array} \right\} \rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 48^\circ = (90 - x) \cdot \operatorname{tg} 36^\circ \rightarrow 1,11x = 0,73(90 - x) \rightarrow$$

$$\rightarrow 1,84x = 65,7 \rightarrow x = \frac{65,7}{1,84} = 35,71$$

$$h = 35,71 \cdot \operatorname{tg} 48^\circ = 35,71 \cdot 1,11 = 39,64 \text{ m}$$

- 28** Un faro de 20 m de altura está colocado sobre un promontorio. Un barco ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y el faro, bajo un ángulo de 40° . Calcula la altura del promontorio.

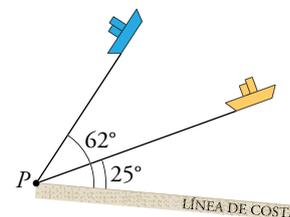


Llamamos h a la altura del promontorio y x a la distancia del barco a la base del pedestal.

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} 15^\circ &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 45^\circ &= \frac{20+h}{x} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{h}{\operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{20+h}{\operatorname{tg} 45^\circ} \rightarrow h \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = (20+h) \cdot \operatorname{tg} 15^\circ \rightarrow h = \frac{20 \operatorname{tg} 15^\circ}{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ} = 7,32 \text{ m}$$

- 29** Dos barcos salen simultáneamente de un punto P con rumbos de 62° y 25° respecto a la línea de costa. El primero lleva una velocidad de 7,5 nudos, y el otro, de 9 nudos. ¿Cuál será la distancia entre ellos al cabo de una hora de navegación?

Después de una hora, los barcos han recorrido, respectivamente, 7,5 y 9 millas náuticas. La distancia que los separa es la longitud del tercer lado del triángulo cuyos vértices son los barcos y el punto P . Esta distancia, d , se puede hallar con el teorema del coseno.



$$d^2 = 7,5^2 + 9^2 - 2 \cdot 7,5 \cdot 9 \cos 37^\circ = 29,43 \rightarrow d = \sqrt{29,43} = 5,423 \text{ millas náuticas}$$

- 30** Para hallar el área de una parcela irregular, hemos tomado las medidas indicadas en la figura. ¿Cuál es su área?

La diagonal opuesta al ángulo de 70° divide al cuadrilátero en dos triángulos.

- Área del triángulo izquierdo:

$$\text{Su altura es } h = 98 \cdot \operatorname{sen} 70^\circ = 92,09 \text{ m} \rightarrow \text{Área}_I = \frac{102 \cdot 92,09}{2} = 4696,6 \text{ m}^2$$

- Área del triángulo derecho:

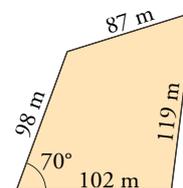
La calcularemos usando la fórmula de Herón y, para ello, necesitamos la longitud, l , del tercer lado.

$$l^2 = 98^2 + 102^2 - 2 \cdot 98 \cdot 102 \cos 70^\circ = 13170 \rightarrow l = \sqrt{13170} = 114,76 \text{ m}$$

$$s = \frac{87 + 119 + 114,76}{2} = 160,3$$

$$\text{Área}_D = \sqrt{160,3 \cdot (160,3 - 87) \cdot (160,3 - 119) \cdot (160,3 - 114,76)} = 4701 \text{ m}^2$$

- El área del cuadrilátero es $4696,6 + 4701 = 9397,6 \text{ m}^2$.



- 31** Dos fuerzas de 18 N y 30 N actúan sobre un punto formando un ángulo de 45° . Calcula la intensidad de la resultante y el ángulo que forma con cada una de las fuerzas.

$$\hat{Q} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

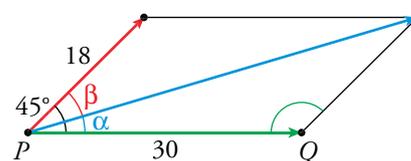
Utilizando el teorema del coseno podemos hallar la longitud, l , de la resultante:

$$l^2 = 18^2 + 30^2 - 2 \cdot 18 \cdot 30 \cos 135^\circ = 1987,7 \rightarrow l = \sqrt{1987,7} = 44,58 \text{ N}$$

Ahora usamos el teorema de los senos:

$$\frac{18}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{44,58}{\operatorname{sen} 135^\circ} \rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{18 \cdot \operatorname{sen} 135^\circ}{44,58} = 0,2855 \rightarrow \alpha = 16^\circ 35' 19''$$

$$\beta = 45^\circ - 16^\circ 35' 19'' = 28^\circ 24' 41''$$



- 32** Desde un punto P observamos un avión que se acerca bajo un ángulo de 30° . Quince segundos después, el ángulo es de 55° . Si el avión vuela a 3000 m de altura, ¿cuál es su velocidad?

Para hallar la velocidad del avión necesitamos calcular la longitud del segmento \overline{NM} :

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{3000}{\overline{PM}} \rightarrow \overline{PM} = \frac{3000}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 6000$$

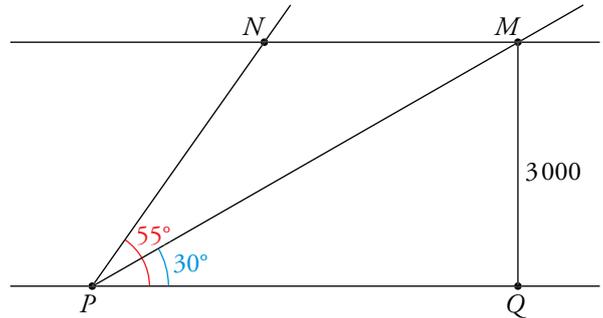
Por otro lado:

$$\hat{N} = 360^\circ - (55^\circ + 2 \cdot 90^\circ) = 125^\circ$$

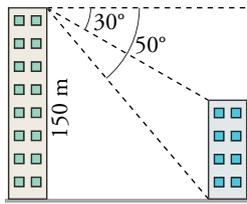
Ahora usamos el teorema de los senos:

$$\frac{6000}{\operatorname{sen} 125^\circ} = \frac{\overline{NM}}{\operatorname{sen} 25^\circ} \rightarrow \overline{NM} = \frac{6000 \cdot \operatorname{sen} 25^\circ}{\operatorname{sen} 125^\circ} = 3095,53 \text{ m}$$

La velocidad del avión es $\frac{3095,53}{15} = 206,37 \text{ m/s}$.



- 33** Desde la terraza de un edificio de 150 m de altura medimos los ángulos que se indican en la figura. Calcula la altura del edificio más bajo y la anchura de la calle.



Representamos la anchura de la calle con la letra a . Usando el ángulo complementario de 50° tenemos que:

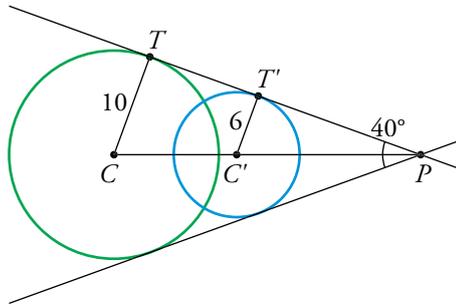
$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{a}{150} \rightarrow a = 150 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = 125,86 \text{ m}$$

La diferencia, d , entre las alturas de las torres podemos obtenerla mediante el ángulo de 30° :

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{d}{125,86} \rightarrow d = 125,86 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 72,67 \text{ m}$$

La altura del edificio más bajo es $150 - 72,67 = 77,33 \text{ m}$.

- 34** Dos circunferencias secantes tienen radios de 6 cm y 10 cm. Sus tangentes comunes forman un ángulo de 40° . Calcula la distancia entre sus centros.



Los triángulos PCT y $PC'T'$ son triángulos rectángulos con hipotenusas \overline{PC} y $\overline{PC'}$, respectivamente.

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \frac{6}{\overline{PC'}} \rightarrow \overline{PC'} = \frac{6}{\operatorname{sen} 20^\circ} = 17,54 \text{ cm}$$

$$\operatorname{sen} 20^\circ = \frac{10}{\overline{PC}} \rightarrow \overline{PC} = \frac{10}{\operatorname{sen} 20^\circ} = 29,24 \text{ cm}$$

$$\overline{CC'} = 29,24 - 17,54 = 11,7 \text{ cm}$$

- 35** En una circunferencia de 12 cm de radio trazamos una cuerda de 20 cm de longitud. ¿Cuál es el ángulo correspondiente a esa cuerda?

Los radios trazados desde los extremos de la cuerda y esta, forman un triángulo isósceles. El ángulo pedido es el opuesto a la cuerda (lado desigual) y podemos hallarlo usando el teorema del coseno.

$$20^2 = 12^2 + 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 \cos \alpha \rightarrow 400 = 144 + 144 - 288 \cos \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow 112 = -288 \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = -\frac{112}{288} = -0,3889 \rightarrow$$

$$\rightarrow \alpha = 112^\circ 53' 10''$$

36 Calcula el área de un octógono regular inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio.

El octógono está formado por 8 triángulos isósceles como el del dibujo.

El ángulo desigual de cada uno de ellos es de $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$.

$$h = 10 \cdot \cos 22,5^\circ = 9,24 \text{ cm}$$

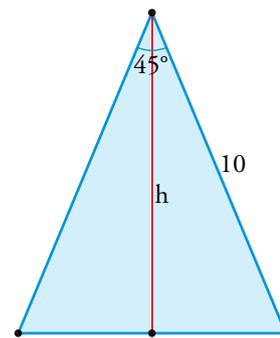
Por otro lado, la longitud de la mitad de la base del triángulo es:

$$10 \cdot \sin 22,5^\circ = 3,83 \text{ cm}$$

Luego el área del triángulo es:

$$A = \frac{2 \cdot 3,83 \cdot 9,24}{2} = 35,39 \text{ cm}^2$$

El área del octógono es 8 veces el área del triángulo, es decir, $8 \cdot 35,39 = 283,12 \text{ cm}^2$.



37 Calcula el área de un hexágono regular circunscrito a una circunferencia de 15 cm de radio.

Este problema se resuelve de forma análoga al anterior. En este caso, el triángulo formado por los radios de la circunferencia y el lado del hexágono es equilátero, porque el ángulo central mide 60° . El lado del hexágono es igual al radio de la circunferencia circunscrita.

La altura, h , (que coincide con la apotema del hexágono) se obtiene así:

$$h = 15 \cdot \cos 30^\circ = 13 \text{ cm}$$

$$S_{\text{HEXÁGONO}} = \frac{6 \cdot 15 \cdot 13}{2} = 585 \text{ cm}^2$$

38 De un trapecio rectángulo conocemos el lado oblicuo, que mide 16 cm, la diagonal menor, 12 cm, y el ángulo que esta forma con la base mayor, 50° . Calcula el área y el perímetro del trapecio.

Utilizando el ángulo complementario de 50° tenemos:

$$\sin 40^\circ = \frac{BC}{12} \rightarrow BC = 12 \cdot \sin 40^\circ = 7,71 \text{ cm}$$

$$\cos 40^\circ = \frac{CD}{12} \rightarrow CD = 12 \cdot \cos 40^\circ = 9,19 \text{ cm}$$

Por otro lado, por el teorema de los senos:

$$\frac{12}{\sin \hat{A}} = \frac{16}{\sin 50^\circ} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{12 \cdot \sin 50^\circ}{16} = 0,5745 \rightarrow \hat{A} = 35^\circ 3' 53''$$

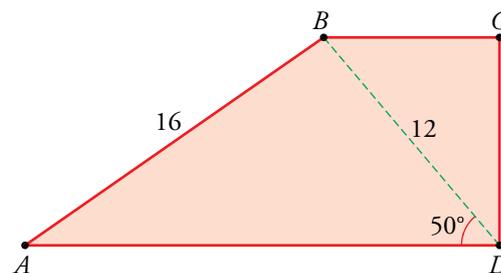
$$\widehat{ABD} = 180^\circ - (50^\circ + 35^\circ 3' 53'') = 94^\circ 56' 7''$$

$$\frac{\overline{AD}}{\sin \widehat{ABD}} = \frac{16}{\sin 50^\circ} \rightarrow \overline{AD} = \frac{16 \cdot \sin \widehat{ABD}}{\sin 50^\circ} = 20,81 \text{ cm}$$

Para terminar:

$$S_{ABCD} = \frac{20,81 + 7,71}{2} \cdot 9,19 = 131,05 \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro} = 20,81 + 9,19 + 7,71 + 16 = 43,71 \text{ cm}$$



39 En un rectángulo $ABCD$ de lados 8 cm y 12 cm, se traza desde B una perpendicular a la diagonal AC , y desde D , otra perpendicular a la misma diagonal. Sean M y N los puntos donde esas perpendiculares cortan a la diagonal. Halla la longitud del segmento MN .

Los triángulos AND y BMC son iguales, luego $\overline{AN} = \overline{MC}$.

Como $\overline{MN} = \overline{AC} - \overline{AN} - \overline{MC}$, entonces $\overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC}$.

Por tanto, basta con calcular \overline{AC} en el triángulo ABC y \overline{MC} en el triángulo BMC .

- En ABC :

$$\overline{AC}^2 = 8^2 + 12^2 = 208 \quad (\text{por el teorema de Pitágoras}) \rightarrow \overline{AC} = 14,4 \text{ cm}$$

Calculamos \hat{C} (en ABC):

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{12}{8} = 1,5 \rightarrow \hat{C} = 56^\circ 18' 35,8''$$

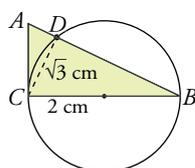
- En BMC :

$$\cos \hat{C} = \frac{\overline{MC}}{8} \rightarrow \overline{MC} = 8 \cdot \cos(56^\circ 18' 35,8'') = 4,4 \text{ cm}$$

$$\text{Por último: } \overline{MN} = \overline{AC} - 2\overline{MC} = 14,4 - 2 \cdot 4,4 = 5,6 \text{ cm}$$

Página 126

- 40** El triángulo ABC es rectángulo en C . Sabemos que el radio de la circunferencia mide 2 cm y $\overline{CD} = \sqrt{3}$ cm. Calcula \overline{AD} y \overline{DB} .



El triángulo CDB es rectángulo en D . Por tanto:

$$\overline{DB}^2 = 4^2 - \sqrt{3}^2 \rightarrow \overline{DB} = \sqrt{13} \text{ cm} = 3,61 \text{ cm}$$

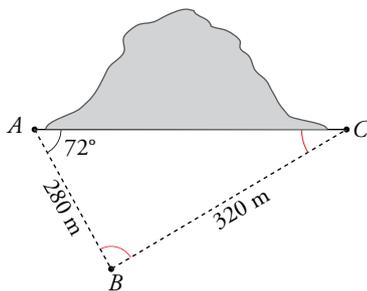
$$\cos \hat{C} = \frac{\sqrt{3}}{4} \rightarrow \hat{C} = 64^\circ 20' 28''$$

$$\widehat{ACD} = 90^\circ - \hat{C} = 25^\circ 39' 32''$$

El triángulo ADC es también rectángulo en D , y conocemos el ángulo \hat{C} y el cateto CD :

$$\operatorname{tg} \widehat{ACD} = \frac{\overline{AD}}{\sqrt{3}} \rightarrow \overline{AD} = \sqrt{3} \operatorname{tg} 25^\circ 39' 32'' = 0,83 \text{ cm}$$

- 41** Para construir un túnel entre A y C necesitamos saber su longitud y dirección. Para ello, fijamos un punto B y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula \overline{AC} y los ángulos \hat{B} y \hat{C} .



Usamos el teorema de los senos:

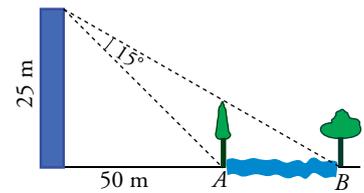
$$\frac{320}{\operatorname{sen} 72^\circ} = \frac{280}{\operatorname{sen} \hat{C}} \rightarrow \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{280 \cdot \operatorname{sen} 72^\circ}{320} = 0,8322 \rightarrow \hat{C} = 56^\circ 19' 31''$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (72^\circ + 56^\circ 19' 31'') = 51^\circ 40' 29''$$

Aplicando de nuevo el teorema de los senos:

$$\frac{320}{\operatorname{sen} 72^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\operatorname{sen} \hat{B}} \rightarrow \overline{AC} = \frac{320 \cdot \operatorname{sen} \hat{B}}{\operatorname{sen} 72^\circ} = 263,96 \text{ m}$$

- 42** Desde una torre de vigilancia de 25 m, observamos dos árboles situados en orillas opuestas de un río bajo un ángulo de 15° . Los dos árboles están alineados con el pie de la torre y la distancia de esta al río es de 50 m. Calcula la anchura del río.



Llamamos \hat{C} al ángulo complementario de \hat{A} .

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{50}{25} = 2 \rightarrow \hat{C} = 63^\circ 26' 6''$$

Por tanto, respecto de la torre de vigilancia, se ve el árbol cuya base están en B con un ángulo de $15^\circ + 63^\circ 26' 6'' = 78^\circ 26' 6''$.

$$\operatorname{tg} (78^\circ 26' 6'') = \frac{50 + \overline{AB}}{25} \rightarrow \overline{AB} = 72,17 \text{ m}$$

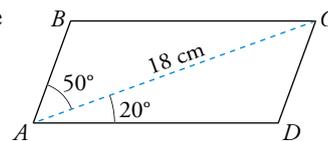
- 43** En un entrenamiento de fútbol se coloca el balón en un punto situado a 5 m y 8 m de cada uno de los postes de la portería, cuyo ancho es de 7 m. ¿Bajo qué ángulo se ve la portería desde ese punto?

Si llamamos α al ángulo pedido, por el teorema de coseno tenemos que:

$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos \alpha \rightarrow 49 = 25 + 64 - 80 \cos \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow 80 \cos \alpha = 40 \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

- 44** Calcula, en este paralelogramo $ABCD$, el área, las longitudes de los lados y la longitud de la otra diagonal:



$$\hat{D} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$$

$$\frac{18}{\operatorname{sen} \hat{D}} = \frac{\overline{AD}}{\operatorname{sen} 50^\circ} \rightarrow \overline{AD} = \frac{18 \cdot \operatorname{sen} 50^\circ}{\operatorname{sen} 110^\circ} = 14,67 \text{ cm}$$

La altura, h , del paralelogramo es:

$$h = 18 \cdot \operatorname{sen} 20^\circ = 6,16 \text{ cm}$$

$$S_{ABCD} = 14,67 \cdot 6,16 = 90,37 \text{ cm}^2$$

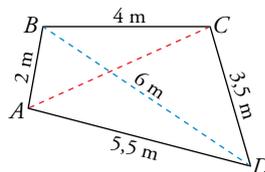
Para hallar la longitud de la otra diagonal calculamos primero $\overline{AB} = \overline{CD}$:

$$\frac{\overline{CD}}{\operatorname{sen} 20^\circ} = \frac{18}{\operatorname{sen} 110^\circ} \rightarrow \overline{CD} = \frac{18 \cdot \operatorname{sen} 20^\circ}{\operatorname{sen} 110^\circ} = 6,55 \text{ cm}$$

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo BAD :

$$\overline{BD}^2 = 6,55^2 + 14,67^2 - 2 \cdot 6,55 \cdot 14,67 \cos 70^\circ = 192,38 \rightarrow \overline{BD} = 13,87 \text{ cm}$$

- 45** En un cuadrilátero $ABCD$ conocemos las medidas de los lados y de la diagonal BD . Calcula las medidas del ángulo \hat{B} y de la diagonal AC .



Aplicamos el teorema del coseno a los triángulos ABD y CBD .

$$5,5^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \cdot 2 \cdot 6 \cos \widehat{ABD} \rightarrow 24 \cos \widehat{ABD} = 9,75 \rightarrow \widehat{ABD} = 66^\circ 1' 50''$$

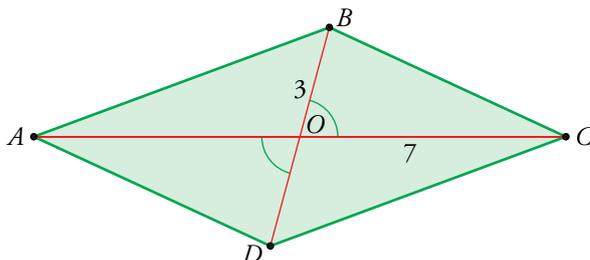
$$3,5^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos \widehat{CBD} \rightarrow 48 \cos \widehat{CBD} = 39,75 \rightarrow \widehat{CBD} = 34^\circ 5' 36''$$

$$\hat{B} = 66^\circ 1' 50'' + 34^\circ 5' 36'' = 100^\circ 7' 26''$$

Ahora aplicamos de nuevo el teorema del coseno al triángulo ABC :

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos (100^\circ 7' 26'') = 22,81 \rightarrow \overline{AC} = 4,78 \text{ cm}$$

- 46** Las diagonales de un paralelogramo miden 6 cm y 14 cm y forman un ángulo de 75° . Halla los lados y los ángulos del paralelogramo.



Como las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio, los segmentos \overline{OB} y \overline{OC} miden, respectivamente, la mitad de la medida de las correspondientes diagonales.

Aplicamos el teorema del coseno:

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 75^\circ = 47,13 \rightarrow \overline{BC} = \overline{AD} = 6,87 \text{ cm}$$

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$$

$$\overline{AB}^2 = 3^2 + 7^2 - 2 \cdot 3 \cdot 7 \cos 105^\circ = 68,87 \rightarrow \overline{AB} = \overline{DC} = 8,3 \text{ cm}$$

Para calcular un ángulo, por ejemplo el ángulo \hat{B} , aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{7}{\text{sen } \widehat{OBC}} = \frac{6,87}{\text{sen } 75^\circ} \rightarrow \text{sen } \widehat{OBC} = \frac{7 \cdot \text{sen } 75^\circ}{6,87} = 0,9842 \rightarrow \widehat{OBC} = 79^\circ 48' 5''$$

$$\frac{7}{\text{sen } \widehat{ABO}} = \frac{8,3}{\text{sen } 105^\circ} \rightarrow \text{sen } \widehat{ABO} = \frac{7 \cdot \text{sen } 105^\circ}{8,3} = 0,8146 \rightarrow \widehat{ABO} = 54^\circ 33' 5''$$

$$\hat{B} = \hat{D} = 79^\circ 48' 5'' + 54^\circ 33' 5'' = 134^\circ 21' 10''$$

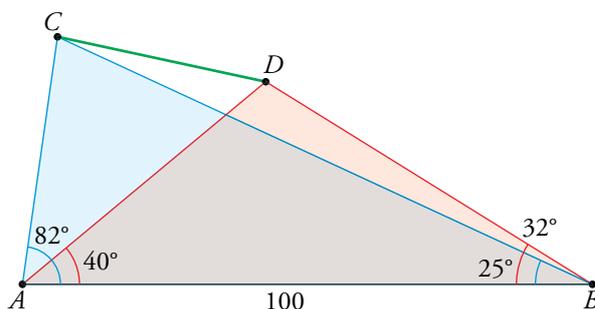
$$\hat{A} = \hat{C} = 180^\circ - 134^\circ 21' 10'' = 45^\circ 38' 50''$$

- 47** Dos árboles C y D se encuentran en la orilla opuesta de un río. Desde dos puntos A y B , situados en la orilla donde nos encontramos, tomamos las siguientes medidas:

$$\overline{AB} = 100 \text{ m} \quad \widehat{CAB} = 82^\circ \quad \widehat{DAB} = 40^\circ$$

$$\widehat{DBA} = 32^\circ \quad \widehat{CBA} = 25^\circ$$

Calcula la distancia que separa a los dos árboles.



Para calcular la distancia \overline{CD} hallaremos primero \overline{AC} y \overline{AD} . De esta manera obtendremos el resultado aplicándole el teorema del coseno al triángulo CAD .

$$\widehat{ACB} = 180^\circ - (82^\circ + 25^\circ) = 73^\circ$$

$$\frac{100}{\text{sen } 73^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } 25^\circ} \rightarrow \overline{AC} = \frac{100 \cdot \text{sen } 25^\circ}{\text{sen } 73^\circ} = 44,19 \text{ m}$$

$$\widehat{ADB} = 180^\circ - (40^\circ + 32^\circ) = 108^\circ$$

$$\frac{100}{\text{sen } 108^\circ} = \frac{\overline{AD}}{\text{sen } 32^\circ} \rightarrow \overline{AD} = \frac{100 \cdot \text{sen } 32^\circ}{\text{sen } 108^\circ} = 55,72 \text{ m}$$

$$\overline{CD}^2 = 44,19^2 + 55,72^2 - 2 \cdot 44,19 \cdot 55,72 \cos 42^\circ = 1397,7 \rightarrow \overline{CD} = 37,39 \text{ m}$$

48 Resuelve estos triángulos, teniendo en cuenta que puede que no exista solución, que la solución sea única o que existan dos soluciones:

a) $a = 3 \text{ m}; b = 8 \text{ m}; \hat{A} = 25^\circ$

b) $a = 12,6 \text{ m}; b = 26,4 \text{ m}; \hat{B} = 124^\circ 34'$

c) $a = 82,6 \text{ m}; b = 115 \text{ m}; \hat{A} = 28^\circ 4'$

a) $\frac{3}{\sin 25^\circ} = \frac{8}{\sin \hat{B}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{8 \cdot \sin 25^\circ}{3} = 1,127 \rightarrow$ No tiene solución porque el seno de un ángulo siempre está comprendido entre -1 y 1 .

b) $\frac{12,6}{\sin \hat{A}} = \frac{26,4}{\sin (124^\circ 34')} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{12,6 \cdot \sin (124^\circ 34')}{26,4} = 0,393 \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 23^\circ 8' 29'' \\ \hat{A} = 156^\circ 51' 31'' \end{cases}$

El segundo resultado no es válido porque $\hat{A} + \hat{B}$ sería mayor que 180° y esto es imposible. En este caso, la solución es única.

$\hat{C} = 180^\circ - (23^\circ 8' 29'' + 124^\circ 34') = 32^\circ 17' 31''$

Ahora, con el teorema del coseno:

$c^2 = 12,6^2 + 26,4^2 - 2 \cdot 12,6 \cdot 26,4 \cos (32^\circ 17' 31'') = 293,33 \rightarrow c = 17,13 \text{ m}$

c) $\frac{82,6}{\sin (28^\circ 4')} = \frac{115}{\sin \hat{B}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{115 \cdot \sin (28^\circ 4')}{82,6} = 0,655 \rightarrow \begin{cases} \hat{B} = 40^\circ 55' 11'' \\ \hat{B} = 139^\circ 4' 49'' \end{cases}$

En este caso, tenemos dos soluciones posibles:

• Si $\hat{B} = 40^\circ 55' 11''$:

$\hat{C} = 180^\circ - (28^\circ 4' + 40^\circ 55' 11'') = 111^\circ 0' 49''$

$c^2 = 82,6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82,6 \cdot 115 \cos (111^\circ 0' 49'') = 26860 \rightarrow c = 163,89 \text{ m}$

• Si $\hat{B} = 139^\circ 4' 49''$

$\hat{C} = 180^\circ - (28^\circ 4' + 139^\circ 4' 49'') = 12^\circ 51' 11''$

$c^2 = 82,6^2 + 115^2 - 2 \cdot 82,6 \cdot 115 \cos (12^\circ 51' 11'') = 1525,8 \rightarrow c = 39,06 \text{ m}$

Cuestiones teóricas

49 Si $\sin \alpha = m$ y α es un ángulo obtuso, expresa en función de m :

a) $\cos \alpha$

b) $\operatorname{tg} \alpha$

c) $\cos (180^\circ - \alpha)$

d) $\operatorname{tg} (-\alpha)$

a) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow m^2 + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - m^2 \rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - m^2}$ ya que el coseno de un ángulo obtuso es negativo.

b) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$

c) $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \sqrt{1 - m^2}$

d) $\operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{\sqrt{1 - m^2}}$

50 Demuestra que en un triángulo ABC , rectángulo en A , se verifica:

a) $\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} = \cos^2 \hat{C} - \sin^2 \hat{C}$

b) $\sin \hat{B} - \cos \hat{C} = 0$

c) $\operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \hat{C} = 1$

a) Como a es la hipotenusa del rectángulo, $a^2 = b^2 + c^2$.

$\frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2} = \frac{b^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \cos^2 \hat{C} + \sin^2 \hat{C}$

b) $\sin \hat{B} - \cos \hat{C} = \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = 0$

c) $\operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} \hat{C} = \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1$

51 ¿Existe algún valor de $\alpha \neq 0$ que verifique $2 \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha$? Justifícalo.

Si $\alpha = 180^\circ$ se cumple la igualdad, ya que el seno y la tangente de 180° valen 0.

Si $\alpha \neq 0$ y también $\alpha \neq 180^\circ$, entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha \neq 0 \text{ y } 2 \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha &\rightarrow 2 \operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \rightarrow \\ &\rightarrow 2 = \frac{1}{\cos \alpha} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \begin{cases} 60^\circ \\ 300^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

52 Prueba que en cualquier paralelogramo de lados a y b y diagonales c y d , se verifica:

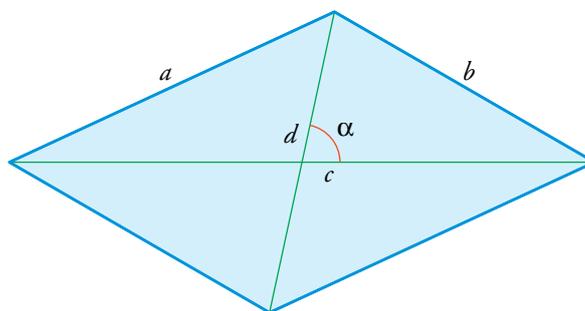
$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$$

* Aplica el teorema del coseno en dos triángulos que tengan un vértice en el centro del paralelogramo.

Utilizamos el hecho de que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio y el teorema del coseno.

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \cos \alpha \\ a^2 &= \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{d}{2} \cos (180^\circ - \alpha) \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

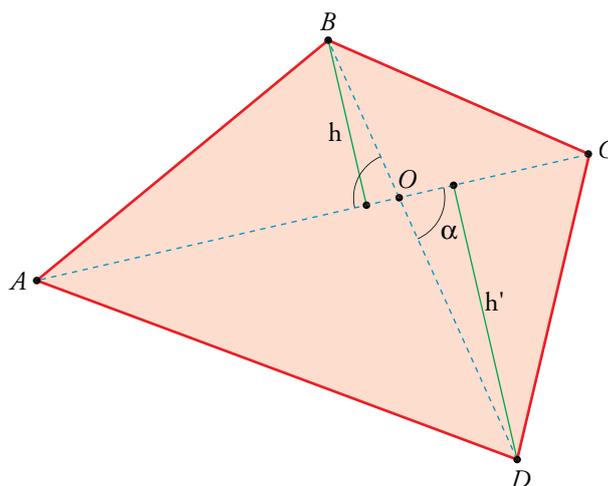
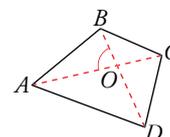
$$\rightarrow \begin{cases} b^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - \frac{cd}{2} \cos \alpha \\ a^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{d^2}{4} - \frac{cd}{2} (-\cos \alpha) \end{cases}$$



Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos que $b^2 + a^2 = \frac{c^2}{2} + \frac{d^2}{2}$, de donde se obtiene la relación $c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$.

53 Demuestra que el área de cualquier cuadrilátero es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.

* Ten en cuenta que: $S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$



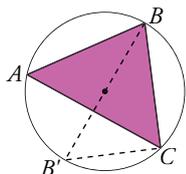
Descomponemos el área del cuadrilátero como la suma de las áreas de los triángulos ABC y CDA . Ambos tienen en común la base AC .

$$h = \overline{OB} \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$h' = \overline{OD} \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{\overline{AC} \cdot h}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot h'}{2} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OB} \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OD} \cdot \operatorname{sen} \alpha}{2} = \frac{1}{2} \overline{AC} (\overline{OB} + \overline{OD}) \cdot \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$$

54



Demuestra que en un triángulo cualquiera ABC se verifica la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{b}{\widehat{\text{sen } B}} = \frac{c}{\widehat{\text{sen } C}} = 2R$$

R es el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

* *Traza el diámetro de la circunferencia desde uno de los vértices. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABC y $BB'C$.*

Las dos primeras igualdades forman el enunciado del teorema de los senos.

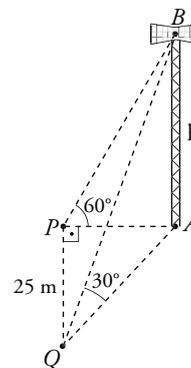
Por otra parte, los ángulos \hat{A} y \hat{B}' son iguales porque abarcan el mismo arco BC . Por tanto, aplicando el teorema de los senos al triángulo $BB'C$ (ya que $\hat{C} = 90^\circ$ porque abarca un arco de 180°):

$$\frac{a}{\widehat{\text{sen } A}} = \frac{a}{\widehat{\text{sen } B'}} = \frac{\overline{BB'}}{\widehat{\text{sen } C}} = \frac{2R}{1} = 2R$$

Página 127

Para profundizar

55 Para medir la altura de una antena, cuyo pie es inaccesible, nos situamos en un punto P al oeste de la antena y la observamos bajo un ángulo de 60° . Caminamos unos 25 metros hacia el sur y desde Q el ángulo de observación es de 30° . Halla la altura de la antena.



* *Expresa PA y QA en función de h .*

$$\text{tg } 30^\circ = \frac{h}{\overline{QA}} \rightarrow \overline{QA} = \frac{h}{\text{tg } 30^\circ} = h\sqrt{3}$$

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{h}{\overline{PA}} \rightarrow \overline{PA} = \frac{h}{\text{tg } 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Aplicamos ahora el teorema de Pitágoras al triángulo APQ :

$$\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 + 25^2 = (h\sqrt{3})^2 \rightarrow \frac{h^2}{3} + 625 = 3h^2 \rightarrow \frac{8}{3}h^2 = 625 \rightarrow h = \frac{25}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 15,31 \text{ m}$$

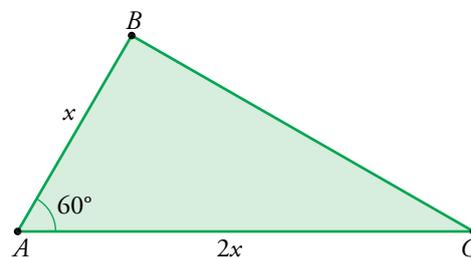
56 Uno de los lados de un triángulo mide el doble que otro, y el ángulo comprendido entre ellos mide 60° . Halla los otros ángulos.

$$\overline{BC}^2 = x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cos 60^\circ = x^2 + 4x^2 - 4x^2 \cdot \frac{1}{2} = 3x^2$$

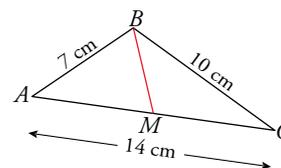
$$\overline{BC} = x\sqrt{3}$$

$$\frac{x\sqrt{3}}{\widehat{\text{sen } 60^\circ}} = \frac{x}{\widehat{\text{sen } C}} \rightarrow \widehat{\text{sen } C} = \frac{x\sqrt{3}/2}{x\sqrt{3}} = \frac{1}{2} \rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ$$



57 En un triángulo ABC de lados $a = 10 \text{ cm}$, $b = 14 \text{ cm}$ y $c = 7 \text{ cm}$, halla la longitud de la mediana que parte de B .



Usamos el teorema del coseno para hallar el coseno del ángulo \hat{A} .

$$10^2 = 7^2 + 14^2 - 2 \cdot 7 \cdot 14 \cos \hat{A} \rightarrow 196 \cos \hat{A} = 145 \rightarrow \cos \hat{A} = \frac{145}{196}$$

Aplicamos ahora el teorema del coseno al triángulo ABM teniendo en cuenta que $\overline{AM} = 7$ por la definición de mediana.

$$\overline{BM}^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cos \hat{A} = 98 - 98 \cdot \frac{145}{196} = \frac{51}{2} = 25,5 \rightarrow \overline{BM} = \sqrt{25,5} = 5,05 \text{ cm}$$

- 58** De un triángulo ABC conocemos los tres lados, $a = 14$ cm, $b = 16$ cm y $c = 9$ cm. Halla la longitud de la bisectriz del ángulo \hat{A} .

Calculamos primero el ángulo α :

$$14^2 = 16^2 + 9^2 - 2 \cdot 16 \cdot 9 \cos \hat{A} \rightarrow 288 \cos \hat{A} = 141 \rightarrow \hat{A} = 60^\circ 41' 12''$$

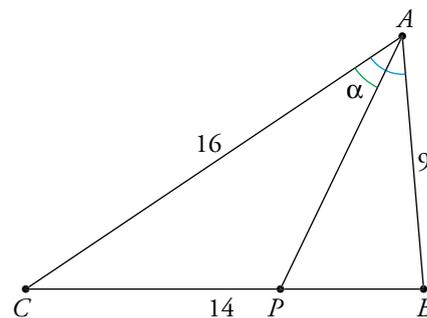
$$\alpha = \frac{\hat{A}}{2} = 30^\circ 20' 36''$$

Calculamos el ángulo \hat{C} :

$$9^2 = 16^2 + 14^2 - 2 \cdot 16 \cdot 14 \cos \hat{C} \rightarrow 448 \cos \hat{C} = 371 \rightarrow \hat{C} = 34^\circ 5' 36''$$

Ahora, $\widehat{APC} = 180^\circ - (30^\circ 20' 36'' + 34^\circ 5' 36'') = 115^\circ 33' 48''$

$$\frac{16}{\sin \widehat{APC}} = \frac{\overline{AP}}{\sin \hat{C}} \rightarrow \overline{AP} = \frac{16 \cdot \sin \hat{C}}{\sin \widehat{APC}} = 9,94 \text{ cm}$$



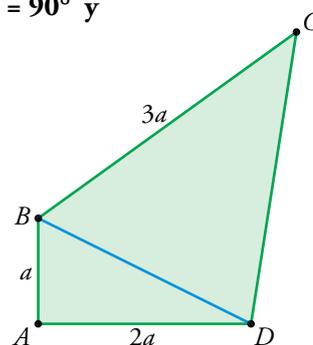
- 59** En el cuadrilátero $ABCD$ sabemos que $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = 2a$, $\overline{BC} = 3a$, $\widehat{BAD} = 90^\circ$ y $\cos \widehat{DBC} = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Calcula \overline{DC} en función de a .

Por el teorema de Pitágoras:

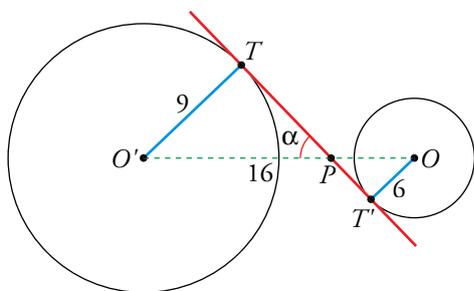
$$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$$

Ahora aplicamos el teorema del coseno:

$$\begin{aligned} \overline{DC}^2 &= (3a)^2 + (a\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 3a \cdot a\sqrt{5} \cos \widehat{DBC} = \\ &= 9a^2 + 5a^2 - a^2 \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 8a^2 \rightarrow \overline{DC} = 2a\sqrt{2} \end{aligned}$$



- 60** Halla el ángulo que forma la tangente a estas circunferencias con la recta que une sus centros. Los radios miden 4 cm y 9 cm, y la distancia entre sus centros es de 16 cm.

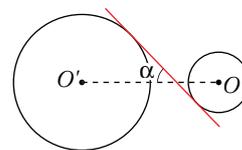


Los triángulos $OT'P$ y $O'TP$ son triángulos rectángulos.

$$\text{sen } \alpha = \frac{9}{\overline{O'P}} \rightarrow \overline{O'P} = \frac{9}{\text{sen } \alpha}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{6}{\overline{OP}} \rightarrow \overline{OP} = \frac{6}{\text{sen } \alpha}$$

$$16 = \overline{O'O} = \overline{O'P} + \overline{PO} = \frac{9}{\text{sen } \alpha} + \frac{6}{\text{sen } \alpha} \rightarrow 16 \text{sen } \alpha = 15 \rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{15}{16} \rightarrow \alpha = 69^\circ 38' 9''$$



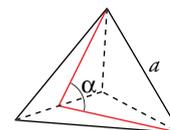
- 61** Halla el ángulo α que forman dos caras contiguas de un tetraedro regular de arista a .

Como cada cara es un triángulo equilátero de lado a , la longitud de los segmentos dibujados es $a \frac{\sqrt{3}}{2}$ (altura del triángulo equilátero de lado a).

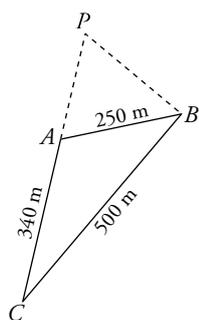
Aplicamos el teorema del coseno:

$$a^2 = \left(a \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2a \frac{\sqrt{3}}{2} a \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha \rightarrow a^2 = \frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2 - \frac{3}{2}a^2 \cos \alpha \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3}{2} \cos \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = 70^\circ 31' 44''$$



62



Queremos calcular la distancia desde A y B a un punto inaccesible P . Para ello, fijamos un punto C de modo que $\widehat{PBC} = 90^\circ$ y tomamos las medidas indicadas en la figura. Calcula \overline{PA} y \overline{PB} .

Calculamos los ángulos \widehat{ABC} y \widehat{CAB} .

$$340^2 = 250^2 + 500^2 - 2 \cdot 250 \cdot 500 \cos \widehat{ABC} \rightarrow 250\,000 \cos \widehat{ABC} = 196\,900 \rightarrow \widehat{ABC} = 38^\circ 2' 18''$$

$$500^2 = 250^2 + 340^2 - 2 \cdot 250 \cdot 340 \cos \widehat{CAB} \rightarrow 170\,000 \cos \widehat{CAB} = -71\,900 \rightarrow \widehat{CAB} = 115^\circ 1' 14''$$

$$\widehat{PAB} = 180^\circ - 115^\circ 1' 14'' = 64^\circ 58' 46''$$

$$\widehat{PBA} = 90^\circ - 38^\circ 2' 18'' = 51^\circ 57' 42''$$

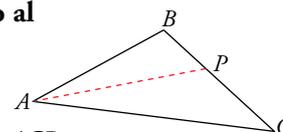
$$\widehat{P} = 180^\circ - (64^\circ 58' 46'' + 51^\circ 57' 42'') = 63^\circ 3' 32''$$

Ahora aplicamos el teorema de los senos para calcular las distancias:

$$\frac{\overline{PA}}{\text{sen } \widehat{PBA}} = \frac{250}{\text{sen } \widehat{P}} \rightarrow \overline{PA} = 220,87 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{PB}}{\text{sen } \widehat{PAB}} = \frac{250}{\text{sen } \widehat{P}} \rightarrow \overline{PB} = 254,12 \text{ m}$$

63 Demuestra que la bisectriz de un ángulo de un triángulo divide al lado opuesto al ángulo en segmentos proporcionales a los otros lados.



* Debes probar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}}$. Aplica el teorema de los senos en los triángulos ABP y ACP .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{AP}}{\text{sen } \widehat{B}} = \frac{\overline{BP}}{\text{sen } \frac{\widehat{A}}{2}} &\rightarrow \overline{AP} \cdot \text{sen } \frac{\widehat{A}}{2} = \overline{BP} \cdot \text{sen } \widehat{B} \\ \frac{\overline{AP}}{\text{sen } \widehat{C}} = \frac{\overline{PC}}{\text{sen } \frac{\widehat{A}}{2}} &\rightarrow \overline{AP} \cdot \text{sen } \frac{\widehat{A}}{2} = \overline{PC} \cdot \text{sen } \widehat{C} \end{aligned} \right\} \rightarrow \overline{BP} \cdot \text{sen } \widehat{B} = \overline{PC} \cdot \text{sen } \widehat{C}$$

Por otro lado:

$$\frac{\overline{AB}}{\text{sen } \widehat{C}} = \frac{\overline{AC}}{\text{sen } \widehat{B}} \rightarrow \text{sen } \widehat{B} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \text{sen } \widehat{C}$$

Sustituyendo $\text{sen } \widehat{B}$ en la primera relación, se obtiene:

$$\overline{BP} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \text{sen } \widehat{C} = \overline{PC} \cdot \text{sen } \widehat{C} \rightarrow \overline{BP} \cdot \overline{AC} = \overline{PC} \cdot \overline{AB} \rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}}$$

Autoevaluación

Página 127

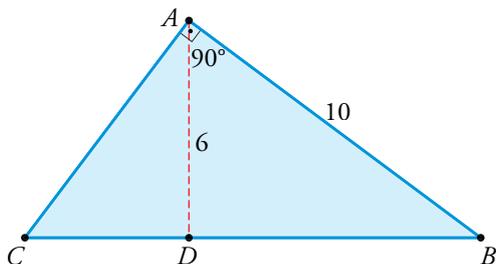
1 En un triángulo isósceles los lados iguales miden 7 cm y los ángulos iguales 52° . Halla la altura y el lado desigual.

Si representamos con la letra h a la altura sobre el lado desigual, b :

$$\text{sen } 52^\circ = \frac{h}{7} \rightarrow h = 7 \cdot \text{sen } 52^\circ = 5,52 \text{ cm}$$

$$\text{cos } 52^\circ = \frac{b/2}{7} \rightarrow b = 14 \cdot \text{cos } 52^\circ = 8,62 \text{ cm}$$

- 2** En un triángulo ABC , rectángulo en A , conocemos el cateto $c = 10$ cm y la altura relativa a la hipotenusa, $h = 6$ cm. Halla los lados y los ángulos desconocidos.



$$\text{sen } \hat{B} = \frac{6}{10} \rightarrow \hat{B} = 36^\circ 52' 12''$$

$$\hat{C} = 90^\circ - 36^\circ 52' 12'' = 53^\circ 7' 48''$$

$$\text{sen } \hat{C} = \frac{6}{b} \rightarrow b = 7,5 \text{ cm}$$

$$a = \sqrt{7,5^2 + 10^2} = 12,5 \text{ cm}$$

- 3** Expresa a través de las razones trigonométricas de un ángulo del primer cuadrante, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: 154° , 207° , 318° , 2456° .

$$\text{sen } 154^\circ = \text{sen } (180^\circ - 154^\circ) = \text{sen } 26^\circ$$

$$\text{cos } 154^\circ = -\text{cos } 26^\circ$$

$$\text{tg } 154^\circ = -\text{tg } 26^\circ$$

$$\text{sen } 207^\circ = \text{sen } (180^\circ + 27^\circ) = -\text{sen } 27^\circ$$

$$\text{cos } 207^\circ = -\text{cos } 27^\circ$$

$$\text{tg } 207^\circ = \text{tg } 27^\circ$$

$$\text{sen } 318^\circ = \text{sen } (360^\circ - 42^\circ) = -\text{sen } 42^\circ$$

$$\text{cos } 318^\circ = \text{cos } 42^\circ$$

$$\text{tg } 318^\circ = -\text{tg } 42^\circ$$

$$\text{sen } 2456^\circ = \text{sen } (360^\circ \cdot 6 + 296^\circ) = \text{sen } 296^\circ = \text{sen } (360^\circ - 64^\circ) = -\text{sen } 64^\circ$$

$$\text{cos } 2456^\circ = \text{cos } 64^\circ$$

$$\text{tg } 2456^\circ = -\text{tg } 64^\circ$$

- 4** Si $\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$ y $\alpha > 90^\circ$, calcula sin hallar el ángulo α :

a) $\text{cos } \alpha$

b) $\text{tg } \alpha$

c) $\text{sen } (180^\circ + \alpha)$

d) $\text{cos } (90^\circ + \alpha)$

e) $\text{tg } (180^\circ - \alpha)$

f) $\text{sen } (90^\circ + \alpha)$

a) $\text{cos}^2 \alpha = 1 - \text{sen}^2 \alpha \rightarrow \text{cos}^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} \rightarrow \text{cos}^2 \alpha = \frac{9}{25} \rightarrow \text{cos } \alpha = \pm \frac{3}{5} \rightarrow \text{cos } \alpha = -\frac{3}{5}$

b) $\text{tg } \alpha = \frac{4/5}{-3/5} = -\frac{4}{3}$

c) $\text{sen } (180^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha = -\frac{4}{5}$

d) $\text{cos } (90^\circ + \alpha) = -\text{sen } \alpha = -\frac{4}{5}$

e) $\text{tg } (180^\circ - \alpha) = -\text{tg } \alpha = \frac{4}{3}$

f) $\text{sen } (90^\circ + \alpha) = \text{cos } \alpha = -\frac{3}{5}$

- 5** Si $\text{tg } \alpha = -3,5$, halla α con ayuda de la calculadora, exprésalo como un ángulo del intervalo $[0, 180^\circ)$ y obtén su seno y su coseno.

$$\alpha = 105^\circ 56' 43''$$

$$\text{sen } \alpha = 0,9615$$

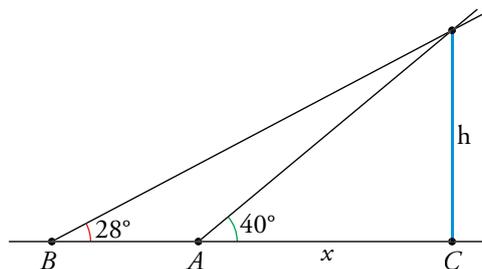
$$\text{cos } \alpha = -0,2747$$

6 Desde un punto del suelo medimos el ángulo bajo el que se ve un edificio y obtenemos 40° . Nos alejamos 30 m y el ángulo es ahora de 28° . Calcula la altura del edificio y la distancia desde la que se hizo la primera observación.

$$\left. \begin{aligned} h &= x \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \\ h &= (x + 30) \cdot \operatorname{tg} 28^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow x \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = (x + 30) \cdot \operatorname{tg} 28^\circ \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{30 \cdot \operatorname{tg} 28^\circ}{\operatorname{tg} 40^\circ - \operatorname{tg} 28^\circ} = 51,89 \text{ m}$$

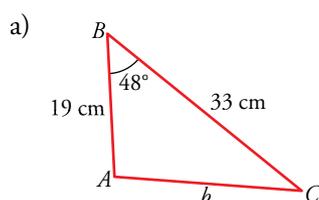
$$h = 51,89 \cdot \operatorname{tg} 40^\circ = 43,54 \text{ m}$$



7 Resuelve el triángulo ABC y halla su área en estos casos:

a) $c = 19 \text{ cm}$, $a = 33 \text{ cm}$, $\widehat{B} = 48^\circ$

b) $a = 15 \text{ cm}$, $b = 11 \text{ cm}$, $\widehat{B} = 30^\circ$



• Con el teorema del coseno, hallamos b :

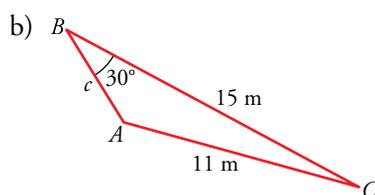
$$b^2 = 19^2 + 33^2 - 2 \cdot 19 \cdot 33 \cos 48^\circ = 610,9 \rightarrow$$

$$\rightarrow b = 24,72 \text{ cm}$$

• Del mismo modo, hallamos \widehat{A} :

$$33^2 = 19^2 + 24,72^2 - 2 \cdot 19 \cdot 24,72 \cos \widehat{A} \rightarrow \cos \widehat{A} = -0,1245 \rightarrow \widehat{A} = 97^\circ 9'$$

• $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 34^\circ 51'$



• Hallamos \widehat{A} con el teorema de los senos:

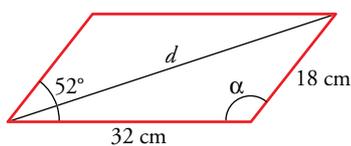
$$\frac{a}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \widehat{B}} \rightarrow \frac{15}{\operatorname{sen} \widehat{A}} = \frac{11}{\operatorname{sen} 30^\circ} \rightarrow \operatorname{sen} \widehat{A} = 0,6818$$

• Hay dos soluciones:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A}_1 &= 42^\circ 59' 9'' \\ \widehat{C}_1 &= 107^\circ 0' 51'' \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{11}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{c_1}{\operatorname{sen} 107^\circ 0' 51''} \rightarrow c_1 = 21,04 \text{ cm}$$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A}_2 &= 137^\circ 0' 51'' \\ \widehat{C}_2 &= 12^\circ 59' 9'' \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{11}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{c_2}{\operatorname{sen} 12^\circ 59' 9''} \rightarrow c_2 = 4,94 \text{ cm}$$

8 Los lados de un paralelogramo miden 18 cm y 32 cm y forman un ángulo de 52° . Halla la longitud de la diagonal mayor.



$$\alpha = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$$

Calculamos d aplicando el teorema del coseno:

$$d^2 = 18^2 + 32^2 - 2 \cdot 18 \cdot 32 \cos 128^\circ = 2057,24$$

$d = 45,36 \text{ cm}$ es la medida de la diagonal.

9 De esta figura, sabemos que $\overline{BD} = \overline{DC}$, $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{ADB} = 45^\circ$ y $\overline{AD} = 5 \text{ m}$. Calcula \overline{BC} .

$$\widehat{ABD} = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$$

$$\frac{5}{\operatorname{sen} 75^\circ} = \frac{\overline{BD}}{\operatorname{sen} 60^\circ} \rightarrow \overline{BD} = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 75^\circ} = 4,48 \text{ m}$$

$$\widehat{BDC} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

$$\overline{BC}^2 = 4,48^2 + 4,48^2 - 2 \cdot 4,48 \cdot 4,48 \cos 135^\circ = 68,525 \rightarrow \overline{BC} = 8,28 \text{ m}$$

